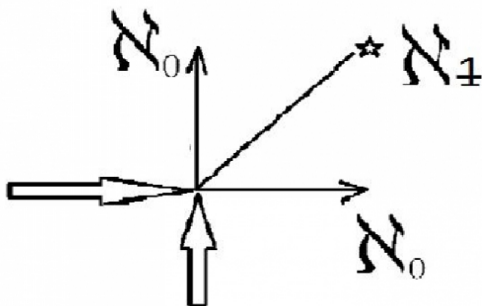


Omaggio a Umberto Cibien

(*mio amico fraterno*)
(PARTE SECONDA)



Voglio ricordarti così, come quando eravamo giovani e forti, quando le nostre menti viaggiavano alla velocità della luce su teorie delle quali solo in poche persone al mondo sono state in grado di compiere le nostre evoluzioni! Come acrobati eravamo in grado di far compiere alle nostre intelligenze dei voli sui più complicati concetti, come anime gemelle giocavamo sui campi della conoscenza! Adesso hai calcolato con estrema precisione l'integrale della gaussiana della parte concernete la tua permanenza su questo pianeta, lo hai fatto per liberarti in una geodetica esistenziale dove neanche i limiti della libertà saranno in grado di contenere il tuo spirito. Sarai sempre con me, nella mia mente e nel mio cuore. Adesso è grande il mio dolore, ma lo saprò superare! Torneremo ancora a giocare!
Ciao Umberto Cibien!



Topologia

Matematizziamo il nastro di Möbius.

(Gli Spazi metrici)

Questo è il primo di una serie di articoli che ci porterà a capire come è possibile generare matematicamente figure geometriche tipo il nastro di Möbius senza usare carta e colla. il percorso non sarà immediato ma nemmeno troppo complesso.

Chi ha nel suo patrimonio culturale personale una conoscenza base degli insiemi e delle relazioni potrà seguire agevolmente senza alcun altro prerequisito.

In ogni caso potete trovare in questi link tutto il necessario per proseguire: insiemi, corrispondenze e funzioni, relazioni di equivalenza.

La trattazione sarà molto intuitiva, anche se le dimostrazioni saranno complete, i disegni dovrebbero aiutare molto per la comprensione.

La topologia in due parole.

Si tratta di un tipo di geometria generalizzata, si interessa comunque, per esempio, di sfere e cubi, ma in essa vengono considerati "oggetti uguali". Infatti possiamo prendere uno di essi e trasformarlo nell'altro stirandolo o schiacciandolo senza però lacerarlo.

In Topologia è lecita ogni trasformazione continua.

Dove per "continua" si intende che punti "vicini" prima della trasformazione, restano tali anche dopo.

Non sottovalutate la topologia che sembra solamente il frutto di menti sofisticate: L'incidenza della Topologia nella scienza moderna è impressionante: la Fisica, a tutti i livelli, dalla Teoria delle Particelle Elementari alla Cosmologia e alla Relatività, ne fa un uso .

Il punto chiave della topologia è la parola **omeomorfismo**, che è la trasformazione continua a cui accennavamo (dal greco homoios = simile e morphe = forma).

Un'espressione del linguaggio corrente che si avvicina al concetto di omeomorfismo è quella di "A è a forma di B". Ad esempio l'espressione "il salvagente è a forma di ciambella", nel linguaggio del topologo è tradotto "il salvagente e la ciambella sono omeomorfe".

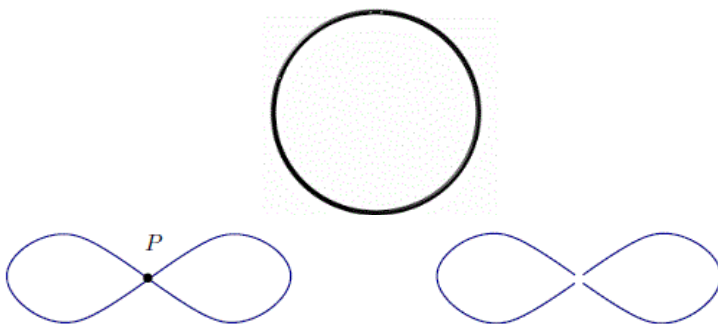
In realtà però sono tra loro omeomorfe anche figure che non si assomigliano poi così tanto, ad esempio una tazza con il manico e una ciambella sono tra loro omeomorfe!



Fonte: Wikipedia: Pubblico dominio

Per poter parlare di omeomorfismo dobbiamo prima parlare di continuità, ma per definire cosa intendiamo per continuità avendo a che fare con degli insiemi qualsiasi, dobbiamo fornire questi insiemi di un qualcosa in più che è appunto **la Topologia dell'insieme**.

Se prendiamo un insieme qualsiasi e lo forniamo di una topologia lo facciamo diventare uno spazio Topologico.



Un cerchio e un "otto" non sono invece figure omeomorfe: partendo dall'otto non è possibile realizzare un cerchio senza strappare il punto P che è in comune alle quattro linee.

Una definizione di spazio topologico

Quando si legge la definizione assiomatica di spazio topologico si può restare immediatamente interdetti.

Nella maggior parte dei casi, senza alcun preambolo, si butta là una definizione assiomatica tipo questa:

Una struttura topologica, o **topologia** su X è una famiglia di sottoinsiemi di X tale che valgano le seguenti proprietà:

- a. l'insieme vuoto e X appartengono a τ ;
- b. l'unione di una qualunque famiglia di elementi di τ appartiene ancora a τ ;
- c. l'intersezione di un numero finito di elementi di τ appartiene ancora a τ .

Gli elementi di τ sono **aperti** della topologia τ ...

Chiaramente il neofita può restare completamente stupito da queste due definizioni, che sembrano uscire dal nulla.

Scopo di questo articolo sarà proprio fare vedere come lo spazio topologico sia una generalizzazione di spazi che già conosciamo.

In particolare introdurremo per primi gli spazi metrici.

Tralasciamo quindi questa definizione che riprenderemo più avanti. Partire-

mo dallo spazio Euclideo che tutti conosciamo per arrivare agli spazi metrici e poi alla topologia.
In questo modo le definizioni dovrebbero essere più chiare.

Lo spazio Euclideo: il più semplice spazio metrico.

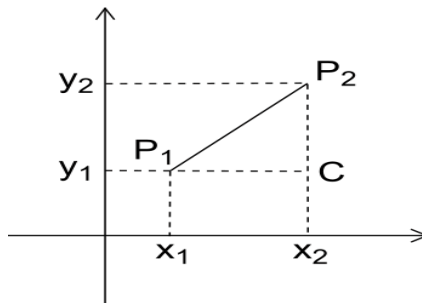
Vediamo sotto un altro punto di vista lo spazio Euclideo che tutti conosciamo; tale spazio può avere diverse dimensioni:

1. La retta di dimensione 1
2. Il piano, di dimensione 2
3. Lo spazio tridimensionale, di dimensione tre.

Sappiamo che i punti di questi spazi sono in corrispondenza biunivoca naturale con R , R^2 , R^3 qualora si fissi una origine e un sistema di coordinate, che ad ogni punto faccia corrispondere le sue coordinate.

In tutti e tre i casi abbiamo una nozione naturale di distanza fra due punti. Per comodità mettiamoci nel piano.

Per trovare la distanza fra due punti dobbiamo semplicemente applicare il teorema di Pitagora:

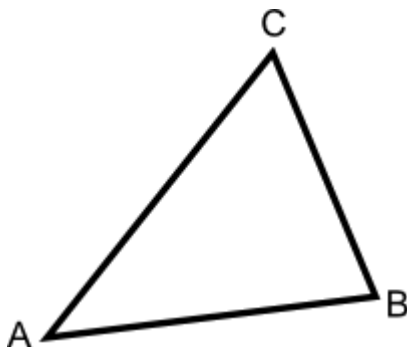


La distanza **P1P2** si ottiene applicando il **teorema di Pitagora** al triangolo **P1CP2**: sappiamo che:

$$P1P2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1. osserviamo che la distanza è un numero ≥ 0 ;
2. che è nulla solo nel caso che i punti coincidano;
3. ovviamente $P_1P_2 = P_2P_1$ (simmetria)

Se prendiamo inoltre tre punti nel piano :



sappiamo dalla geometria Euclidea, che:

4. $AB < AC + CB$ (in un triangolo un lato è sempre minore della somma degli altri due. Questo fatto è noto come **diseguaglianza triangolare**. Analiticamente, questo si traduce in:

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} < \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} + \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

Con questa definizione di distanza, che è quella naturale, lo spazio euclideo diviene uno spazio **metrico**.

Ma ai matematici piacciono le generalizzazioni:

prendiamo un insieme qualsiasi, X , dove sia definita una applicazione:

$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi alla **4 proprietà** illustrate nell'esempio sopra:

1. $d(x,y) \geq 0$.
2. $d(x,y) = 0$ se (e soltanto se) $x = y$

3. $d(x,y)=d(y,x)$ simmetria
4. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ che continuiamo a chiamare disegualianza triangolare.

L'insieme X , munito della applicazione $d(x,y)$ diventa uno **SPAZIO METRICO**.

Come ripeto stiamo generalizzando ; X può essere un insieme qualsiasi.

Vediamo un esempio:

su un insieme qualsiasi X possiamo definire la distanza detta *discreta* definita da: $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ $d(x, y)=0$ se $x = y$.

E' una distanza?

1. $d(x,y) \geq 0$ (o è 1 o è 0);
2. $d(x,y)=0$ solo se $x=y$ per definizione;
3. $d(x,y)=d(y,x)$ (la definizione non dipende dall'ordine).
4. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$; chiaramente i tre punti sono distinti, per cui $1+1 > 1$. Un tale spazio (X, d) è chiamato **spazio metrico discreto**.

Un altro esempio addirittura con le funzioni!

Sia X l'insieme delle funzioni continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$

definiamo $d(f,g)=\max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$.

Anche questa è una distanza; qualcuno vuole provare a dimostrarlo?

Adesso che abbiamo visto che gli spazi metrici sono oggetti totalmente generali, vogliamo definire in essi un concetto che molti di voi già conoscono dallo studio di funzioni reali di variabile reale, ma in altro modo totalmente generico.

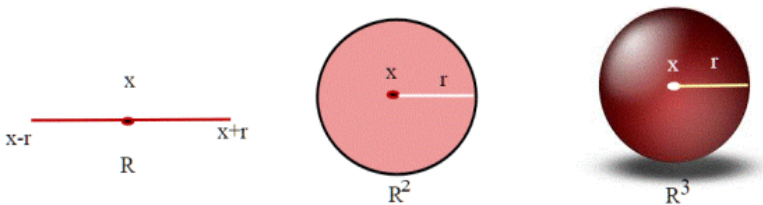
Per far ciò abbiamo prima bisogno di un tipo di insieme fondamentale:

Definizione di Bolla in uno spazio metrico.

Sia X uno spazio metrico dotato di una certa distanza d ; prendiamo un punto x di X , chiamiamo bolla di raggio r , dove r è un certo numero reale maggiore di zero, e **centro** x , l'insieme: $B_r(x) = \{y \in X \text{ tali che:}$

$$d(x, y) < r\}$$

Esempi:

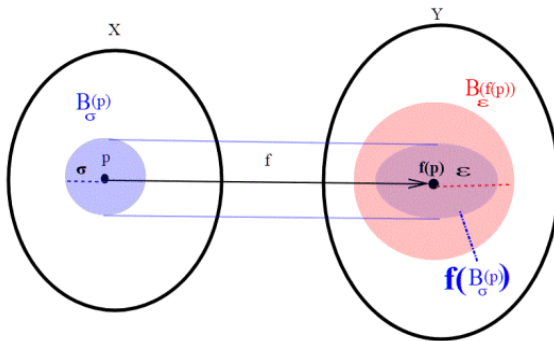


1. In \mathbb{R} , con la distanza usuale ($|x-y|$) la bolla di raggio r e centro x è l'intervallo $(x - r, x + r)$.
2. In \mathbb{R}^2 , con la metrica euclidea, le bolle di centro x sono dischi centrati in x .
3. In \mathbb{R}^3 le bolle sono delle sfere piene.

Continuità

Grazie alla definizione di bolla possiamo dare un'altra definizione, quella di **continuità**:

Diremo che una funzione fra due spazi metrici $f: X \rightarrow Y$ è continua in un punto p , se comunque prendiamo una Bolla di raggio ϵ e centro $f(p)$ in Y , troviamo una bolla di raggio σ e centro p in X , tale che la sua immagine sia contenuta nella bolla scelta in Y :



detto in termini più formali:

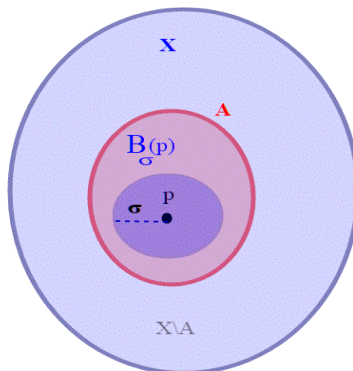
Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione fra spazi metrici; diremo che f è continua in $p \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\sigma > 0$ tale che:

$$f(B_\sigma(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p)).$$

Diremo poi semplicemente che $f: X \rightarrow Y$ è una funzione continua se è continua in ogni punto p di X .

Insiemi aperti

Un'altra definizione che ci servirà è che è molto importante, è quella di **insieme aperto**.



Dato un insieme X con la sua metrica d , definiamo un sottoinsieme $A \subseteq X$ aperto, se comunque scegliamo un punto p appartenente ad A , $p \in A$, esiste una bolla con centro in p contenuta in A , ovvero più formalmente, esiste un $\sigma > 0$ tale che:

$$B_\sigma(p) \subseteq A.$$

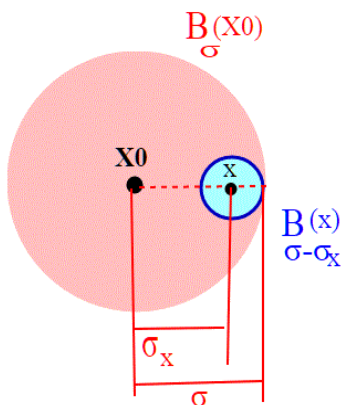
A cosa ci fa pensare questa definizione? Al fatto che in tale tipo di insieme ci si può avvicinare quanto si vuole al suo bordo, trovando sempre "infiniti" punti accanto ad esso.

Dopodiché si sfrutta questa definizione per darne un'altra:

Un sottoinsieme C di X si dice **chiuso** se il suo complementare $(X \setminus C)$ è aperto in \mathbf{R} con la distanza data dal valore assoluto della differenza fra le ascisse di due punti, gli intervalli (a, b) sono aperti mentre quelli di tipo $[a, b]$ non sono aperti (infatti ogni bolla di centro b esce fuori dall'intervallo $[a, b]$ e quindi non vi può essere contenuta).

Gli intervalli di tipo $[a, b)$ oppure $(a, b]$ non sono ne aperti ne chiusi.

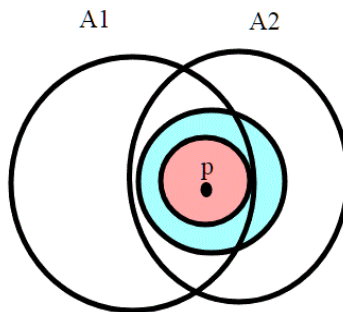
Le bolle, in uno spazio metrico, sono sempre aperte.



Infatti se $\sigma_x = d(x_0, x)$, $\sigma_x < \sigma$, $B(x, \sigma - \sigma_x) \subseteq B(x_0, \sigma)$.
E' evidente dal disegno.

Prendiamo adesso uno spazio metrico X con la sua distanza d .
 Consideriamo gli insiemi aperti di X , allora:

1. Φ (insieme vuoto) e X sono aperti
 Φ non ha punti, quindi è aperto; prendiamo un qualsiasi punto x di X ; qualsiasi bolla con centro in X è per forza contenuta in X , basta vedere la definizione di bolla; $B_r(x) = \{y \in X \text{ tali che } d(x, y) < r\}$
2. Se A_1 e A_2 sono aperti anche $A_1 \cup A_2$ è un insieme aperto; in generale se A_i al variare dell'indice i sono aperti, anche $\cup_i A_i$ è un insieme aperto.
 (supponiamo infatti che un punto $p \in \cup_i A_i$; allora, per qualche i $p \in A_i$; esiste allora una bolla $B_\sigma(p) \subseteq A_i$, ma tale bolla allora è contenuta anche nell'unione $\cup_i A_i$)
3. Se A_1, A_2 sono aperti, anche l'intersezione $A_1 \cap A_2$ è un insieme aperto.
4. (se un punto p appartiene all'intersezione $A_1 \cap A_2$, allora appartiene sia ad A_1 che A_2 ; ma A_1 e A_2 sono aperti.



Esistono allora due bolle centrate in p , che stanno rispettivamente dentro A_1 e dentro A_2 ; sono concentriche, quindi la loro intersezione che è sempre una bolla (quella più piccola) starà dentro l'intersezione $A_1 \cap A_2$.

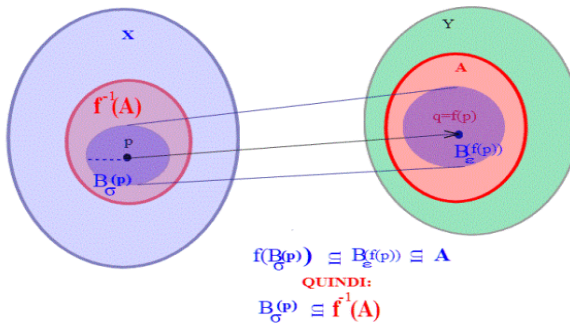
L'aver introdotto gli insiemi aperti, ci permette di cambiare la definizione di funzione continua, in questo modo;

Una funzione $f: X \rightarrow Y$ fra due spazi metrici è continua se e solo se per ogni aperto A di Y , $f^{-1}(A)$ è un aperto di X .

Supponiamo per prima cosa che f sia **continua** con la definizione usuale. Sia $A \subseteq Y$ un aperto.

Dato un $p \in f^{-1}(A)$, sia $q = f(p) \in A$

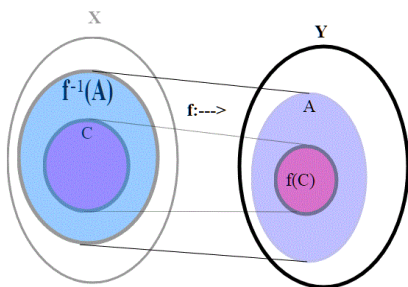
Ricordiamo che dato un **insieme A** nel **codominio**, l'insieme $f^{-1}(A)$ è l'insieme degli $x \in X$ tali che la loro **immagine $f(x)$** vada a finire dentro A .



Dobbiamo dimostrare che $f^{-1}(A)$ è aperto, ovvero che esiste una bolla di centro p tutta contenuta in $f^{-1}(A)$.

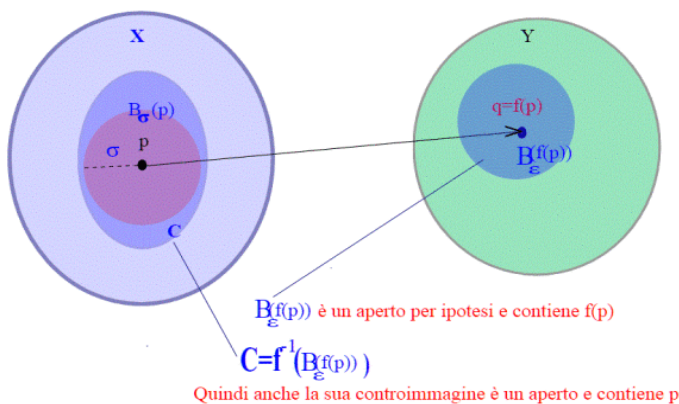
Per ipotesi A è aperto, quindi esiste una bolla di centro $f(p)$ contenuta in A : $B_{\epsilon}(f(p)) \subseteq A$; essendo f **continua**, esiste un'altra bolla di centro in p tale che $f(B_{\sigma}(p)) \subseteq B_{\epsilon}(f(p)) \subseteq A$, ovvero abbiamo trovato una bolla $B_{\sigma}(p) \subseteq f^{-1}(A)$, quindi $f^{-1}(A)$ è aperto.

(se l'immagine di un insieme C , $f(C)$ è contenuta in A , allora l'insieme è contenuto in $f^{-1}(A)$).



Dobbiamo adesso dimostrare l'altra implicazione; supponiamo che per ogni aperto A in Y , $f^{-1}(A)$ sia aperto.

Per fare questo si deve dimostrare che f è continua.



Prendiamo allora un $p \in X$ e un $\epsilon > 0$; la bolla $B_{\epsilon}(f(p))$ è un insieme aperto.

Quindi per ipotesi $f^{-1}(B_{\epsilon}(f(p)))$ è un insieme aperto e contiene p . Sappiamo allora che esiste una bolla (e un σ) con centro in p contenuta in $f^{-1}(B_{\epsilon}(f(p)))$, ovvero $B_{\sigma}(p) \subseteq f^{-1}(B_{\epsilon}(f(p)))$ che implica $f(B_{\sigma}(p)) \subseteq B_{\epsilon}(f(p))$.

Ma questo significa proprio che f è continua in p .

Questo è un fatto molto importante, ovvero la possibilità di studiare la continuità senza fare uso della distanza (o senza nemmeno conoscerla), ma solamente conoscendo gli insiemi aperti.

In topologia si studiano le trasformazioni continue fra spazi; grazie a questa dimostrazione possiamo dimenticarci il concetto di distanza e assegnare assiomaticamente gli insiemi aperti.

Siamo perciò ora in grado di capire da dove nasce la definizione assiomatica citata all'inizio.

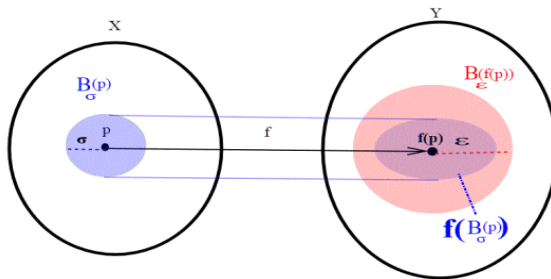
Nel prossimo articolo cominceremo a parlare della Topologia vera e propria.

Spazi Metrici

Nella prima parte di questa serie di articoli abbiamo parlato di spazi metrici, di bolle, di insiemi aperti e continuità.

Il risultato più importante è stato quello di aver dimostrato l'equivalenza fra due distinte definizioni di continuità fra spazi metrici: la prima, che è la più conosciuta ed è la seguente:

Diremo che una funzione fra due spazi metrici $f: X \rightarrow Y$ è continua in un punto p , se comunque prendiamo una Bolla di raggio ε e centro $f(p)$ in Y , troviamo una bolla di raggio σ e centro p in X , tale che la sua immagine sia contenuta nella bolla scelta in Y :



Detto in termini più formali:

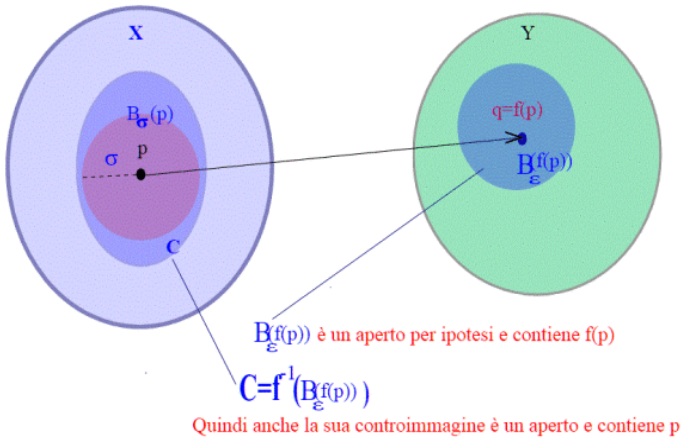
Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione fra spazi metrici; diremo che f è continua in $p \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\sigma > 0$ tale che:

$$f(B_\sigma(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p)).$$

Diremo poi semplicemente che $f: X \rightarrow Y$ è una funzione continua se è continua in ogni punto p di X .

Ebbene, siamo riusciti a dimostrare che la definizione di continuità fra spazi metrici può essere data anche senza parlare di bolle e distanza, ma solo usando gli insiemi aperti:

Una funzione $f: X \rightarrow Y$ fra due spazi metrici è continua se e solo se per ogni aperto A di Y , $f^{-1}(A)$ è un aperto di X .



Il bello di questa definizione è che ci fa sganciare completamente dalla necessità di avere una distanza per definire la continuità, e di poterlo fare solamente avendo a disposizione delle famiglie di aperti.

Ricordiamo che proprietà hanno gli aperti negli spazi metrici:

1. Φ (insieme vuoto) e X sono aperti.
2. Se A_1 e A_2 sono aperti anche $A_1 \cup A_2$ è un insieme aperto; in generale se gli insiemi A_i al variare dell'indice i sono aperti, anche $\bigcup_i A_i$ è un insieme aperto.
3. Se A_1, A_2 sono aperti, anche l'intersezione $A_1 \cap A_2$ è un insieme aperto.

Ebbene, se uniamo questi concetti possiamo arrivare alla definizione assiomatica di spazio topologico, che avevamo già anticipato nel primo articolo:

Una struttura topologica, o **topologia** su X è una famiglia τ di sottoinsiemi di X tale che valgano le seguenti proprietà:

- a. l'insieme vuoto e X appartengono a τ ;
- b. l'unione di una qualunque famiglia di elementi di τ appartiene ancora a τ ;
- c. l'intersezione di un numero finito di elementi di τ appartiene ancora a τ .

Gli elementi di τ sono detti **aperti** della topologia τ , e gli elementi di X sono chiamati punti di X .

La coppia (X, τ) si chiama spazio topologico.

Bene, adesso siamo in grado di capire meglio questa definizione; gli spazi metrici sono **spazi metrici**, e in essi possiamo definire gli aperti tramite le bolle; nella topologia abbiamo una struttura in un certo senso più povera, però molto più vasta; per dare una topologia ci basta dare questi insiemi che devono però soddisfare le proprietà 1,2,3 degli aperti.

Ogni spazio metrico è uno spazio topologico, non è però vero il contrario.

Un paio di esempi per verificare quanto appena detto:

Primo esempio :

L'insieme delle parti $\mathbf{P}(X)$, ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X è una topologia.

Identifichiamo dunque i sottoinsiemi di X come nostri aperti.

1. Φ (insieme vuoto) e X sono sottoinsiemi di X ;
2. L'unione di qualsivoglia sottoinsiemi di X è ancora un sottoinsieme di X ;
3. L'intersezione di due qualsiasi sottoinsiemi di X è un sottoinsieme di X (che può essere anche vuota).

Secondo esempio :

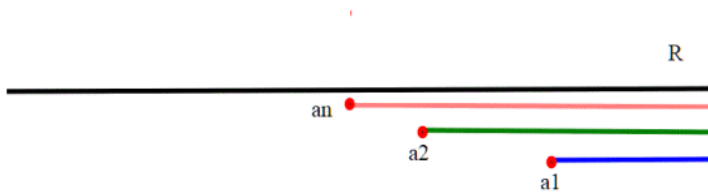
Mettiamoci su \mathbf{R} e consideriamo questa famiglia di insiemi:

$$\mathcal{T} = \{(a, +\infty), \text{ con } a \in \mathbf{R}\} \cup \{\mathbf{R}, \Phi\}.$$

anche detta la topologia delle semirette positive.

Vediamo che abbiamo aggiunto Φ e \mathbf{R} per soddisfare la prima proprietà. Ma vediamo la seconda, ovvero quella dell'unione:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (a_i, +\infty) = (\inf_{i \in I} a_i, +\infty)$$



Se devo infatti fare l'unione delle semirette colorate, mi basta prendere quella con $\mathbf{a_i}$ più piccolo (in questo caso $\mathbf{a_n}$) per ottenere il risultato.

Se invece devo fare l'intersezione sulle due semirette $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$, basta prendere la semiretta con $\mathbf{a_1}$, che è il più grande dei due.

$$\text{In simboli: } (a, +\infty) \cap (b, +\infty) = (\max\{a, b\}, +\infty).$$

In entrambi i casi otteniamo ancora delle semirette positive.

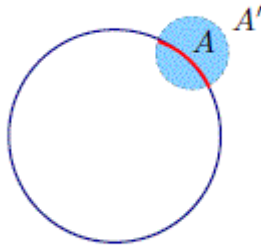
Topologia indotta

Quando si fanno delle trasformazioni, non sempre si prende tutto lo spazio topologico, ma si considera solo un certo sottoinsieme.

Esempio: più avanti tratteremo il cerchio e il quadrato, che sono sottoinsiemi del piano R^2 .

Essi sono detti sottospazi topologici, ma con qual topologia? Sia X un insieme e S un suo sottoinsieme prendiamo come aperti l'intersezione dei sottoinsiemi A di S con gli aperti A' di X .

Esempi di aperti su un cerchio sono archi con gli estremi esclusi, che possono essere ottenuti intersecando il cerchio con una bolla in R^2 .



L'aperto A (arco di cerchio) si ottiene intersecando l'aperto A' del piano con il cerchio.

Continuità negli spazi topologici

Come detto sopra, basta estendere quello che abbiamo visto per gli spazi metrici agli spazi topologici:

Una funzione $f: X \rightarrow Y$ fra due spazi topologici è continua se per ogni aperto A di Y , $f^{-1}(A)$ è un aperto di X .

Possiamo vedere con degli esempi che la continuità dipende strettamente dalla topologia, ovvero da come sono fatti gli aperti.

Per esempio: sappiamo che la funzione $f(x) = x^2$ considerata in $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ con la metrica usuale e quindi la topologia che da essa deriva, è una funzione continua; consideriamo invece la stessa funzione in $R_s \rightarrow R_s$ con la topologia delle semirette positive, definita sopra.

Ebbene, con tale topologia la funzione non è continua.

Infatti: $f^{-1}((1, +\infty)) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ che non è una semiretta positiva.

Questo deriva semplicemente dal fatto che tutti i numeri minori di -1 o maggiori di 1 elevati al quadrato danno un numero maggiore di uno.

Ma l'insieme di destra, $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, non è una semiretta positiva.

Nel prossimo articolo uniremo i concetti visti per arrivare agli oggetti più importanti della topologia: gli **Omeomorfismi**.

Gli Omeomorfismi

Eccoci arrivati al concetto più importante della topologia!

Una funzione $f: X \rightarrow Y$ fra spazi topologici è un omeomorfismo se f è continua, biettiva e la sua inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ è anch'essa continua.

Due spazi topologici X e Y si dicono omeomorfi e scriviamo $X \cong Y$ se esiste un omeomorfismo $f: X \rightarrow Y$.

Si richiede quindi l'esistenza di una corrispondenza biunivoca f fra X e Y ; per quello che abbiamo visto sulle funzioni, **se è biunivoca** allora la funzione f è **invertibile**.

Si richiede inoltre che anche l'inversa, f^{-1} , sia continua.

Come si può intuire dalla definizione, il concetto di omeomorfismo offre molta libertà; le trasformazioni indotte sono molto più sconcertanti di quelle che siamo abituati a vedere, che conservano la "**forma**" dell'oggetto come l'abbiamo sempre intesa (pensiamo alle traslazioni, rotazioni, simmetrie; un quadrato resta un quadrato e un cerchio anche).

Gli esempi che faremo sono all'interno di spazi metrici che sono quindi anche spazi topologici.

ESEMPIO 1

Un omeomorfismo può "allungare" o "accorciare" a piacere un segmento

Consideriamo degli intervalli chiusi di \mathbb{R} , $[a,b]$, $[c,d]$.

Questi intervalli sono degli insiemi, e sono degli spazi topologici considerando gli aperti generati dalla metrica euclidea.

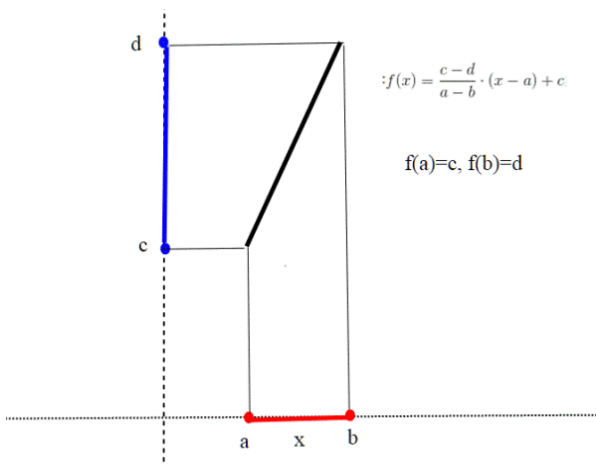
Consideriamo la funzione :

$f: [a,b] \rightarrow [c,d]$ così definita: $f(x) = \frac{c-d}{a-b} \cdot (x-a) + c$; que-

sta funzione rappresenta una retta, e quindi è continua. La funzione inversa è anch'essa una retta, e quindi è continua.

Inutile poi dire che è una applicazione biettiva.

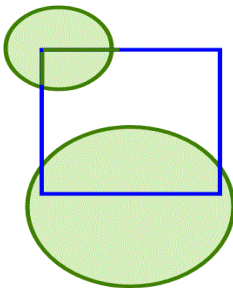
Quindi è un omeomorfismo che trasforma un segmento allungandolo (o accorciandolo).



ESEMPIO 2:

Una considerazione preliminare sugli aperti del quadrato.

Se consideriamo un quadrato nello spazio euclideo, esso eredita la topologia del piano, che è fatta di bolle (cerchi nel nostro caso) gli aperti del quadrato sono quelli che si ottengono intersecando tali cerchi (aperti) con il quadrato.

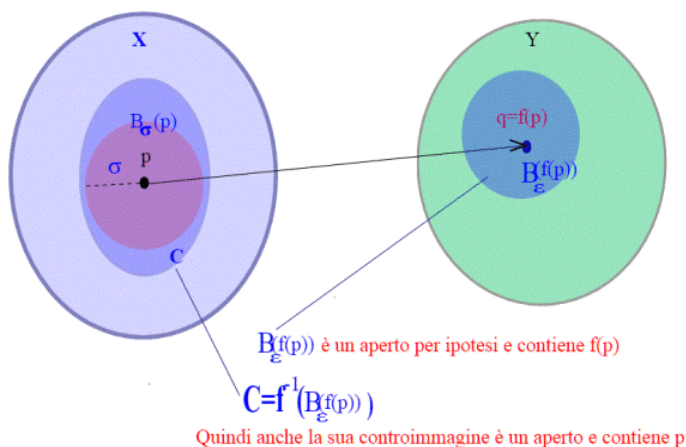


Come aperti avremo dunque segmenti o l'unione di più segmenti, con dei punti in comune.

Un cerchio è omeomorfo a un quadrato.

Ricordo qui la definizione equivalente di continuità, che ci servirà appena sotto.

Una funzione $f: X \rightarrow Y$ fra due spazi metrici è continua se e solo se per ogni aperto A di Y , $f^{-1}(A)$ è un aperto di X .



Consideriamo un cerchio S di centro $(0,0)$ e raggio 1 , e il quadrato Q ad esso circoscritto, quindi di lato 2 .

Siamo nel piano euclideo.

Consideriamo la funzione $f: Q \rightarrow S$ data da $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

Tale funzione è la restrizione della $f(x) = \frac{x}{|x|}$ considerata in tutti i punti del piano **fuorché il punto $(0,0)$** .

Attenzione che con x intendiamo la coppia $x=(x_1, x_2)$, con $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ la **distanza del punto (x_1, x_2)** dall'origine, o se volete, **il modulo del vettore x** .

Osserviamo intanto che tale funzione ha modulo unitario; infatti:

$$|f(\mathbf{x})| = \frac{|x|}{|x|} = 1; \text{ quindi tutti i suoi punti stanno sulla circonferenza.}$$

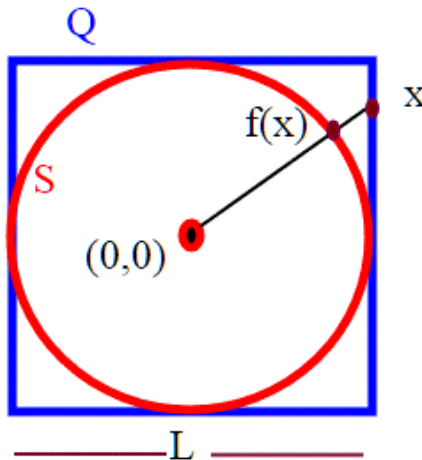
Senza addentrarci in conti analitici che riguardano inoltre le funzioni di due variabili, cerchiamo di capire un po' intuitivamente questa funzione.

Ovviamente è biunivoca: unendo punti diversi sui lati del quadrato, otteniamo punti diversi sulla circonferenza; inoltre la funzione $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{S}$ è anche suriettiva; preso un qualunque punto \mathbf{P} sul cerchio, prolunghiamo il segmento \mathbf{OP} fino a raggiungere il quadrato.

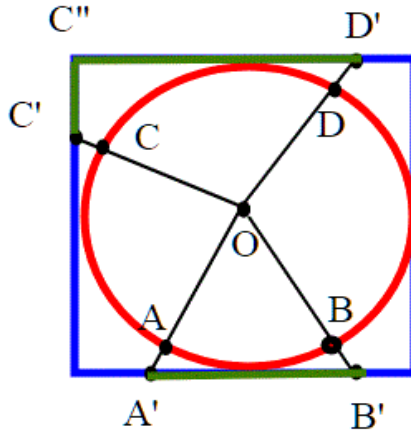
Sappiamo poi, per quanto visto nell'articolo precedente sulla topologia indotta, che gli aperti sul cerchio sono gli archi, estremi esclusi; sul quadrato sono invece dei segmenti, o l'unione di segmenti con un estremo in comune.

Se adesso *consideriamo la controimmagine di un arco su \mathbf{S}* (definizione di continuità): *tale controimmagine è un segmento* o un'unione di segmenti, che sono gli aperti di \mathbf{Q} .

Quindi f è continua.



Due esempi di archi (aperti del cerchio) e della loro controimmagine:



Lo stesso discorso possiamo evidentemente fare per l'inversa f^{-1} ; essa manda gli aperti di \mathbb{Q} (segmenti o unione di segmenti) in archi di cerchio.

Quindi il quadrato è **omemomorfo** al cerchio.

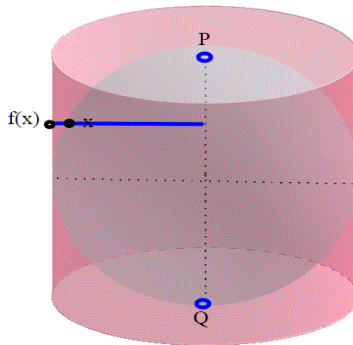
Questo mostra che un omeomorfismo può deformare una curva, creando anche degli spigoli.

Il cono è omeomorfo alla sfera senza poli

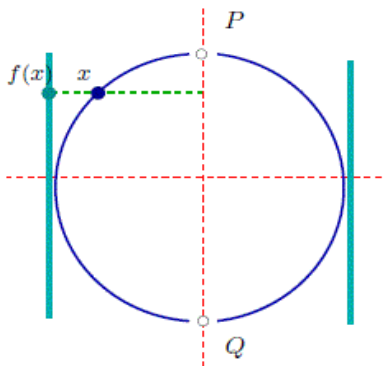
Che il quadrato sia omeomorfo al cerchio è già una cosa ben strana, ma che il cilindro sia omeomorfo ad una sfera..

Il trucco sta nel togliere i due poli!

La costruzione grafica dell'omeomorfismo è simile a quello precedente, ma è tridimensionale.



E in sezione:



Si tratta di proiettare ogni punto della sfera ortogonalmente alla superficie del cilindro; **non possiamo farlo in P o Q** perché la funzione avrebbe due valori diversi; ma questo non è possibile per una funzione.

Per questo motivo alla sfera sono stati tolti quei due punti.

Quando ho scritto il primo articolo su questi argomenti, avevo promesso ai lettori che sarebbe stato sufficiente conoscere solo i concetti base sugli insiemi, applicazioni e relazioni di equivalenza.

Voglio mantenere questa promessa; se esprimiamo la funzione del disegno esplicitamente, (assieme naturalmente alle equazioni di sfera e cilindro) si **può dimostrare che f è un omeomorfismo**, ma bisogna conoscere le funzioni di più variabili.

Chi vuole può fare la dimostrazione, magari la scrive in un commento.

Potremmo anche metterla in calce a questo articolo.

Vi lascio le definizioni analitiche che servono:

La sfera di raggio 1 ha equazione: $S = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$;

il cilindro C ha equazione:

$C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1, -1 < x_3 < 1\}$.

Una funzione che esplicita l'omeomorfismo è data da:

$f: S \rightarrow C ; f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, x_3 \right)$.

Dimostrare che è unomeomorfismo.

Siamo partiti dai due buchi sulla sfera e li abbiamo allargati fino ad ottenere un cilindro; un omeomorfismo può quindi allargare dei buchi (anche se non può crearne di nuovi).

Prima di arrivare al nastro di Möbius, dobbiamo affrontare un altro concetto chiave della topologia: **la connessione**.

Spazi connessi

Abbiamo visto che gli omeomorfismi sono un sistema per verificare se due spazi sono topologicamente equivalenti.

A volte è un po' difficile però decidere se esiste o no un omeomorfismo fra due spazi, perciò si è costretti a ricorrere ad altri metodi.

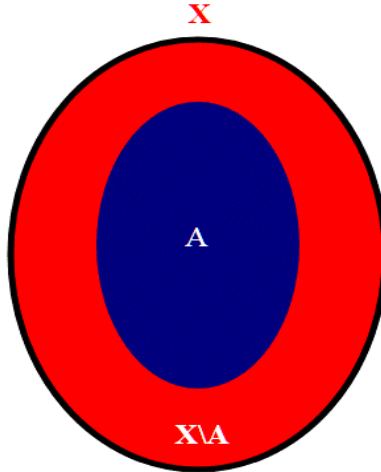
Siamo alla ricerca di una proprietà che contraddistingua gli spazi e che resti tale se le si applica un omeomorfismo.

Una di queste proprietà è la **connessione**.

Insiemi chiusi.

Ricordo che per definire una topologia, dobbiamo dare una famiglia di insiemi, detti aperti.

Se X è l'insieme dei punti dello spazio topologico, un sottoinsieme di X , C , **si dice chiuso se il suo complementare A in X è aperto**; partendo dalla topologia di uno spazio metrico come \mathbb{R}^2 , proviamo a capire il senso di questa definizione.



Un insieme A e il suo complementare in X , $X \setminus A$.

Quando abbiamo parlato degli aperti negli spazi metrici, avevamo visto in particolare che:

1. Φ (insieme vuoto) e X sono aperti

Φ non ha punti, quindi è aperto; prendiamo un qualsiasi punto x di X ; qualsiasi bolla con centro in X è per forza contenuta in X , basta vedere la definizione di bolla; $B_r(x) = \{y \in X \text{ tali che } d(x, y) < r\}$

Ma allora se Φ è aperto, il suo complementare X è chiuso; allo stesso modo essendo X aperto, il suo complementare Φ è chiuso.

Capiamo allora che un insieme può essere contemporaneamente aperto e chiuso, una cosa non esclude l'altra.

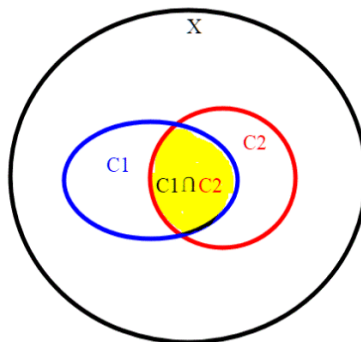
Dalle proprietà degli aperti, si deducono delle analoghe proprietà per i chiusi:

i) Φ (insieme vuoto) e X sono chiusi (lo abbiamo appena visto)

ii) l'intersezione di una famiglia di insieme chiusi, C_i , è un insieme chiuso: sappiamo che $X \setminus \bigcap_i C_i = \bigcup_i (X \setminus C_i)$ risulta essere un aperto, quindi l'intersezione sarà un chiuso.

Vediamo la validità di questa eguaglianza graficamente nel caso di due insiemi C_1, C_2 :

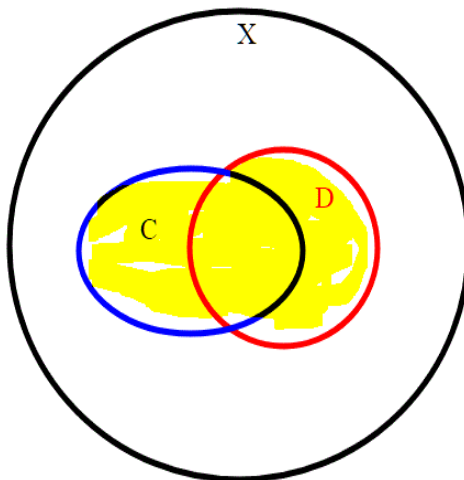
$$X \setminus (C_1 \cap C_2) = (X \setminus C_1) \cup (X \setminus C_2)$$



in pratica se togliamo a X la parte gialla, otteniamo la stessa cosa dell'unione fra i complementari di C_1 e C_2 .

iii) se C e D sono chiusi, anche $C \cup D$ è chiuso.
 essendo $X \setminus (C \cup D) = (X \setminus C) \cap (X \setminus D)$ che risulta un aperto, quindi l'unione sarà un chiuso.

$$X \setminus (C \cup D) = X \setminus C \cap X \setminus D$$



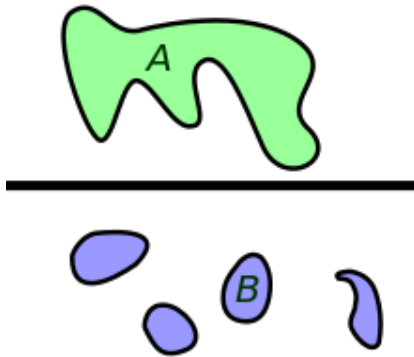
analogamente se togliamo a X la parte gialla otteniamo l'intersezione fra i complementari di C_1 e C_2

Definizione di connessione.

Uno spazio topologico X si dice connesso se gli unici sottoinsiemi di X che sono sia aperti che chiusi sono X e \emptyset .

Viceversa, uno spazio topologico X che ha un sottoinsieme contemporaneamente aperto e chiuso, diverso da X e da \emptyset , si dice sconnesso.

L'idea intuitiva di uno spazio connesso è quella di "**spazio fatto di un unico pezzo**".

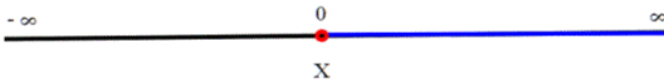


Uno spazio *connesso* **A in verde** e sotto uno spazio *disconnesso*

Lo spazio \mathbf{R} della retta reale è connesso.

Non dimostreremo questo fatto, perché la dimostrazione implica delle conoscenze di analisi matematica che non tutti possono avere.

Intuitivamente, è una conseguenza della continuità dei numeri reali; sappiamo che nella retta reale non ci sono "buchi".



Proviamo a togliere un punto alla retta \mathbf{R} .

Se consideriamo la retta \mathbf{R} , che è connessa, e gli togliamo un punto, ad esempio lo zero, otteniamo un insieme $\mathbf{X} = \mathbf{R} - \{0\}$ che risulta sconnesso, infatti $\mathbf{D} = (-\infty, 0)$ è un sottoinsieme di \mathbf{X} che è sia aperto che chiuso.

Per vedere questo osserviamo che $(-\infty, 0) = \mathbf{X} \cap (-\infty, 0]$, quindi è chiuso * (intersezione di chiusi) e $(-\infty, 0) = \mathbf{X} \cap (-\infty, 0)$ e quindi è aperto (intersezione di aperti).

Quindi \mathbf{D} è sia aperto che chiuso. *Teniamo presente che \mathbf{X} è sia chiuso che aperto.

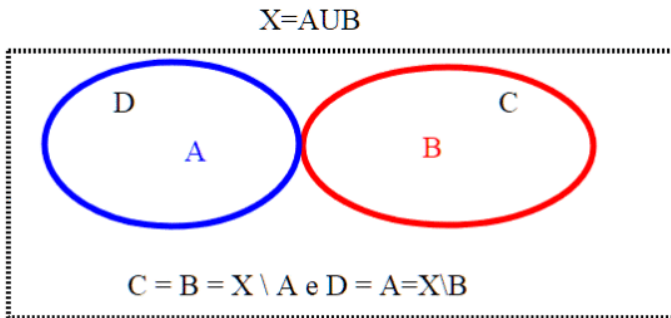
Definizioni equivalenti di connessione.

Esistono altre due definizioni di connessione, equivalenti a quella data.

- 1) Non esistono due aperti che siano non vuoti, disgiunti e tali che la loro unione dia tutto X .
- 2) Non esistono due chiusi che siano non vuoti, disgiunti e tali che la loro unione dia tutto X .

Intanto vediamo che 1,2 sono equivalenti.

Supponiamo (per assurdo) che esistano A, B aperti non vuoti e disgiunti, la cui unione è X , vogliamo vedere che in questo modo esistono C, D chiusi non vuoti e disgiunti la cui unione sia X ; basta prendere $C = B = X \setminus A$ è il complementare di un aperto e quindi è chiuso; e $D = A = X \setminus B$ che è sempre il complementare di un aperto, quindi è chiuso; $D \cup C$ dà poi proprio X .



Riprendiamo adesso la prima definizione di spazio connesso che abbiamo visto per prima:

Uno spazio topologico X si dice connesso se gli unici sottoinsiemi di X che sono sia aperti che chiusi sono X e \emptyset .

dimostriamo che questa definizione è equivalente alla 1)

Esistono A, B aperti non vuoti e disgiunti tali che $A \cup B = X$; A è aperto e $B = X \setminus A$ aperto se e solo se A è chiuso.

Quindi A è sia aperto che chiuso!

Ci serve adesso un criterio per poter dire se uno spazio è connesso o no, basandoci sulla connessione di spazi che conosciamo (**ad esempio proprio \mathbb{R}**).

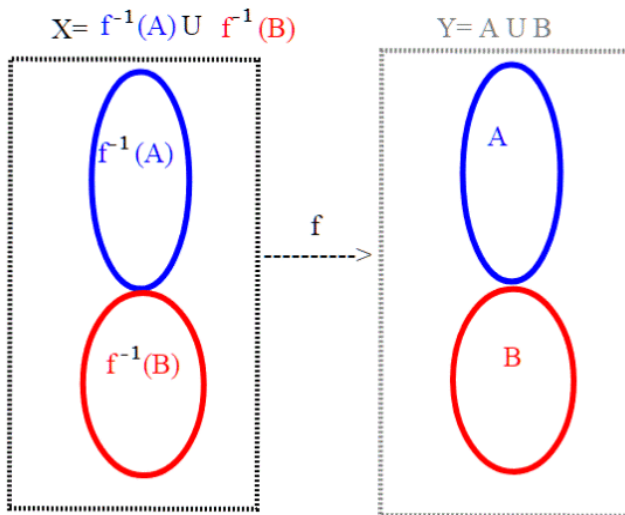
Ci viene in aiuto questo teorema, che possiamo provare a dimostrare:

Se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua tra due spazi topologici e X è connesso, allora anche $f(X)$ è connesso.

Possiamo supporre f suriettiva. $f: X \rightarrow Y$.

In tal caso Y prende il ruolo di $f(X)$.

Per assurdo scriviamo, se Y non è connesso, $Y = A \cup B$ con A e B aperti non vuoti e disgiunti;



Vediamo che $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$; infatti chiaramente $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subseteq X$; dobbiamo dimostrare che $X \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Sia x un qualsiasi $x \in X$; allora $f(x)=y$ appartiene a $Y = A \cup B$.

Questo significa che y appartiene ad A o y appartiene a B .

Ma allora $x \in f^{-1}(A)$ o $x \in f^{-1}(B)$.

Abbiamo poi che $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.

Infatti se per assurdo $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, essendo $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$, $f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$,

avremmo un $x \in A \cap B$, contro l'ipotesi che siano disgiunti.

Dunque $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono aperti (per la **definizione di continuità**), non vuoti e disgiunti quindi X è sconnesso.

Assurdo.

Ma se abbiamo a che fare con un omeomorfismo la funzione f , continua, è senz'altro suriettiva su Y .

Se ne conclude che **se esiste un omeomorfismo di $X \rightarrow Y$, X è connesso se e solo se Y è connesso.**

Infatti la f è continua e suriettiva ed anche la sua inversa f^{-1} lo è per definizione di omeomorfismo.

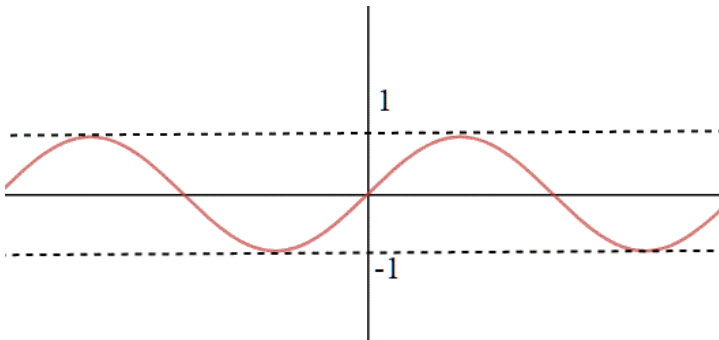
Quindi il discorso vale in entrambi i sensi.

Ritorniamo dunque al discorso fatto nell'introduzione: abbiamo trovato un metodo alternativo per vedere se due spazi sono omeomorfi.

Infatti, **se X è connesso e Y no, non possono essere due spazi omeomorfi**, quindi inutile cercare un omeomorfismo.

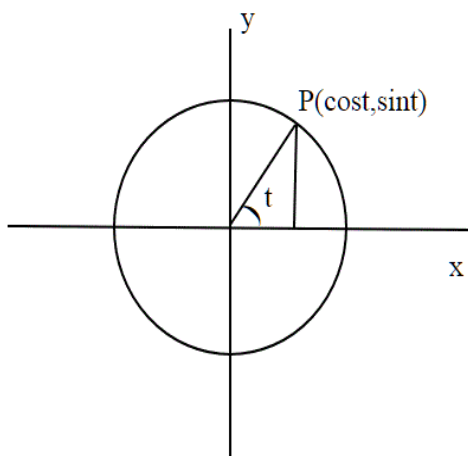
Teniamo presente adesso gli esempi di omeomorfismo fatti nella terza parte (inerente il concetto di omeomorfismi).

L'intervallo $[-1, 1]$ è connesso, essendo l'immagine di \mathbf{R} tramite la funzione $f(t) = \sin t$, di conseguenza anche ogni intervallo di tipo $[a, b]$ è connesso essendo omeomorfo a $[-1, 1]$. (sappiamo che un omeomorfismo può "allungare" o "accorciare" a piacere un segmento).



Si può dimostrare che i sottoinsiemi di \mathbf{R} connessi sono tutti e soli gli intervalli.

Il cerchio S^1 (cerchio di raggio unitario) è connesso, essendo immagine della funzione continua $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ data da $f(t) = (\cos t, \sin t)$.



La prossima volta parleremo di un altro modo per definire la connessione (**connessione per archi**) e delle componenti connesse, ma prima, ricordo due definizioni:

Due definizioni equivalenti di connessione.

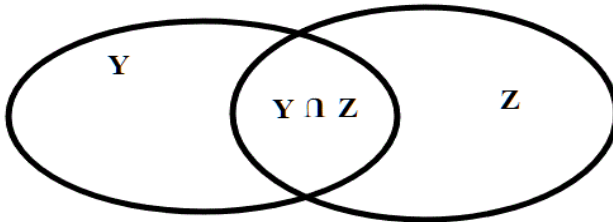
Sia X un insieme: X è *connesso* se:

1. Non esistono due aperti che siano non vuoti, disgiunti e tali che la loro unione dia tutto X .
2. Non esistono due chiusi che siano non vuoti, disgiunti e tali che la loro unione dia tutto X .

Continuiamo il discorso sugli spazi connessi, introducendo le componenti connesse e la connessione per archi.

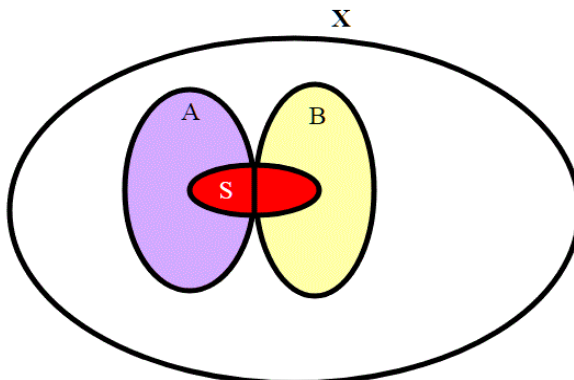
Una osservazione importante:

Siano Y e Z connessi in uno spazio topologico X . Se $Y \cap Z \neq \emptyset$, allora $Y \cup Z$ è connesso.



Facciamo una premessa: sia S un sottoinsieme connesso di X , e supponiamo $S \subseteq A \cup B$ con A e B aperti non vuoti e disgiunti, allora $S \subseteq A$ oppure $S \subseteq B$ infatti, se non fosse così, potremmo scrivere:

$S = (S \cap A) \cup (S \cap B)$ unione di aperti in S non vuoti e disgiunti che implica che S è sconnesso; quindi vale $S \cap A = \emptyset$ oppure $S \cap B = \emptyset$, da cui $S \subseteq A$ oppure $S \subseteq B$, che è possibile solo se $S \subseteq A$ oppure $S \subseteq B$.



Torniamo alla proposizione:

Siano Y e Z connessi in uno spazio topologico X . Se $Y \cap Z \neq \emptyset$, allora, $Y \cup Z$ è connesso.

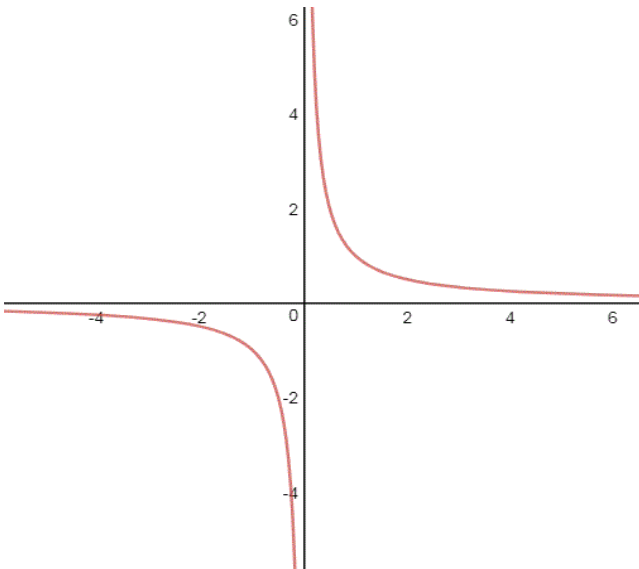
Assumiamo per assurdo che esistano A, B aperti, non vuoti, disgiunti tali che $A \cup B = Y \cup Z$.

Questa uguaglianza comporta che $Y \subseteq A \cup B$ e che $Z \subseteq A \cup B$.

Per ipotesi Y è connesso, quindi $Y \subseteq A$ oppure $Y \subseteq B$, (osservazione precedente) questo vale anche per Z , inoltre si esclude che $Y \cup Z$ sia contenuto completamente in A (oppure in B) perché in tal caso B (oppure A) sarebbe vuoto; quindi non perdiamo di generalità assumendo $Y \subseteq A$ e $Z \subseteq B$ che implica che $A \cap B \supseteq Y \cap Z \neq \emptyset$, ma sappiamo che $A \cap B = \emptyset$.

Componenti connesse

Se consideriamo l'iperbole nel piano come sottospazio topologico, vediamo che è sconnessa:



I due rami sono invece connessi.

Chiaramente i due rami sono disgiunti, e la loro unione dà l'iperbole.

I due rami prendono il nome di componenti connesse.

Ciò risulta molto intuitivo, ma vediamo come si arriva alla definizione formale di componenti connesse.

In uno spazio topologico X , due **punti** x e y sono detti **connessi** se \exists un connesso Y tale che $x, y \in Y$.

La relazione ρ definita su uno spazio topologico X da: " $\forall x, y \in X, x\rho y \Leftrightarrow x$ e y sono connessi in X " è una relazione di equivalenza:

i) $x \rho x$; infatti basta considerare un connesso che contiene x ,

ii) se $x \rho y$, allora $y \rho x$ se esiste un connesso che contiene x e y , questo contiene anche y e x .

iii) se $x \rho y$ e $y \rho z$ allora esiste un connesso C che contiene x, y e un connesso C' che contiene y, z ; ma allora C e C' hanno un punto in comune, y , pertanto $C \cap C' \neq \emptyset$; ma allora, come dimostrato sopra, $C \cup C'$ è connesso e contiene x, z quindi $x \rho z$.

Ma una relazione di equivalenza induce una **partizione** di X :

Ogni spazio topologico X è unione disgiunta delle sue componenti connesse.

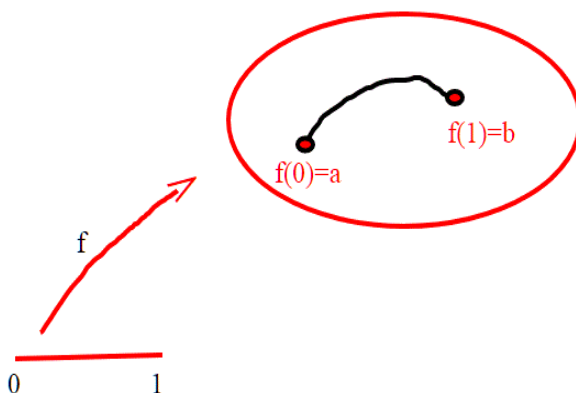
1. L'iperbole in \mathbf{R}^2 ha 2 componenti connesse, ovvero i due rami, ciascuna dei quali omeomorfo a \mathbf{R} .
2. $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ ha due componenti connesse: $[0, 1]$ e $[2, 3]$

Connessione per archi; un piccolo cenno.

Un altro sistema per verificare la connessione di uno spazio topologico è la seguente: sia X uno spazio topologico, consideriamo l'intervallo $[0,1]$.

Sia $f: [0,1] \rightarrow X$ una funzione continua.

Tale funzione prende il nome di arco su X (è una linea continua contenuta in X).



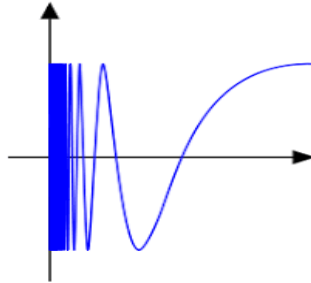
Diciamo che il nostro spazio X è connesso per archi, se comunque scegliamo due punti a, b esiste un arco f tale che $f(0)=a, f(1)=b$.

Uno spazio connesso per archi è connesso:

Assumiamo per assurdo che $X = A \cup B$ con A, B aperti non vuoti, disgiunti, allora prendiamo $a \in A$ e $b \in B$; per ipotesi esiste un arco f che li congiunge: $f : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $f(0)=a, f(1)=b; I=[0, 1]$ è connesso quindi $f(I)$ connesso, $f(I) = (A \cap f(I) \cup (B \cap f(I)))$

sarebbe unione di aperti non vuoti e disgiunti, quindi sconnesso: assurdo.

Non è però vero il viceversa; ci vuole un controesempio e ne esiste uno molto complesso, detto il seno del topologo:



Chissà forse un giorno potremmo provare a dimostrarlo per esercizio, cercando di approfondire meglio.

Chiudiamo qui con la connessione: la prossima volta affronteremo concetti più avanzati che ci porteranno a definire dei sottospazi importanti, fra i quali il **nastro di Möbius**.

Sto parlando di “**topologia quoziente**”.

La “Topologia quoziente”.

Finora abbiamo visto esempi di spazi topologici "esistenti".

Ci preoccupiamo ora di costruire dei nuovi spazi topologici partendo da spazi noti.

Premessa

Appena più avanti, useremo due proprietà degli insiemi e delle funzioni che si sintetizzano così:

Data una funzione f , suriettiva fra due insiemi $f: X \rightarrow Y$, valgono le due seguenti proprietà:

a) Se U_i è una famiglia di sottoinsiemi di Y , allora

$f^{-1}(\cup_i U_i) = \cup_i f^{-1}(U_i)$, ovvero la controimmagine dell'unione degli U_i è l'unione delle controimmagini.

b) se U, V sono due sottoinsiemi di X allora:

$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ ovvero la controimmagine dell'intersezione è l'intersezione delle controimmagini.

Vorrei lasciare la facile verifica di queste proprietà al lettore; basta applicare la definizione di controimmagine di un sottoinsieme.

Spazi quoziente

Supponiamo di avere uno spazio topologico X , un insieme Y , e una qualsiasi funzione f , che però deve essere suriettiva, di $X \rightarrow Y$.

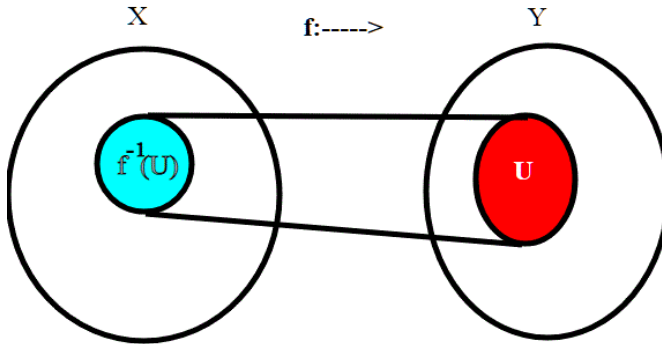
Ebbene, abbiamo già creato un nuovo spazio topologico: Y .

Per farlo, dobbiamo però definire la topologia su Y , ovvero dare un metodo per definire gli aperti.

Chiamiamo U un qualsiasi sottoinsieme di Y .

Sappiamo che f è suriettiva, quindi $f^{-1}(U)$ è un certo sottoinsieme di X , diverso da vuoto.

Diciamo che U è un aperto di Y se $f^{-1}(U)$ è aperto in X .



Con questa **definizione** \mathbf{Y} diventa una topologia.
 Ricordiamo gli assiomi che devono soddisfare gli aperti per formare una topologia \mathbf{t} :

- a. *l'insieme vuoto e X appartengono a \mathbf{t} ;*
- b. *l'unione di una qualunque famiglia di elementi di \mathbf{t} appartiene ancora a \mathbf{t} ;*
- c. *l'intersezione di un numero finito di elementi di \mathbf{t} appartiene ancora a \mathbf{t} .*

a: questo è vero perché $f^{-1}(\Phi) = \Phi, f^{-1}(Y) = X$.

Quindi Φ e Y appartengono a \mathbf{t} .

Consideriamo adesso l'unione di una famiglia di U_i aperti; le controimmagini di questi insiemi sono degli aperti in X .

Ma allora con la topologia definita dalla funzione f , f diventa automaticamente continua.

Quindi dato uno spazio topologico X , per costruire un nuovo spazio topologico Y basta dare una funzione $f: X \rightarrow Y$ che sia suriettiva.

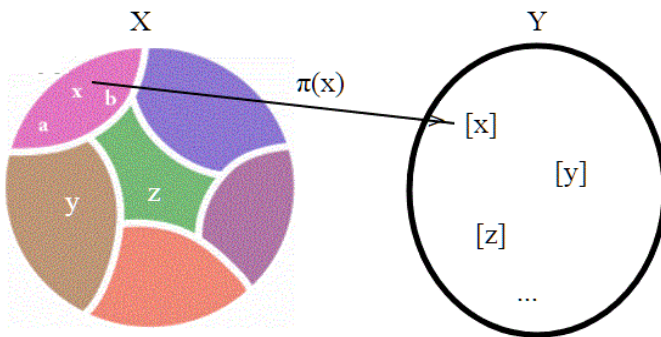
In particolare, possiamo definire una funzione suriettiva partendo da una relazione d'equivalenza.

Consideriamo uno spazio topologico X e una relazione d'equivalenza \sim ; sappiamo che tale relazione crea una partizione di X (X è unione di insiemi disgiunti, detti classi della relazione).

Se consideriamo come Y l'insieme delle classi di tale relazione, ovvero $Y = \{[p] : p \in X\}$ (i due punti significano "tali che"), sappiamo che esiste una funzione naturale che ad ogni x in X associa la sua classe; tale funzione prende anche il nome di proiezione.

Y viene anche indicato con $Y = X / \sim_X$.

Chiamando π tale proiezione, avremo $\pi: X \rightarrow Y, \pi(x)=[x]$.



L'applicazione è suriettiva, in quanto ogni elemento ha una classe d'equivalenza (al limite quella rappresentata da se stesso) mentre non è iniettiva (più punti possono finire nello stesso elemento).

In tal modo lo spazio quoziente $Y = X / \sim_X$ diventa uno spazio topologico con la topologia relativa alla funzione π .

Il fatto che π non sia iniettiva, ovvero che come detto sopra possa mandare più punti in uno stesso punto dello spazio topologico Y , fa sì che la topologia quoziente prenda il nome di "**topologia degli spazi incollati**".

In matematica incollare due punti significa far coincidere gli stessi dichiarandoli come **equivalenti**, e questo si può fare solo con una relazione d'equivalenza.

Notare che con la **topologia definita da π** , lo spazio quoziente di una relazione d'equivalenza non è solo un insieme di punti, ma **uno spazio topologico vero e proprio**.

Con queste definizioni, riusciremo a fare quello che si può fare con la carta e la colla, ovvero potremmo generare il nastro di Möbius partendo da un rettangolo e incollandolo matematicamente.

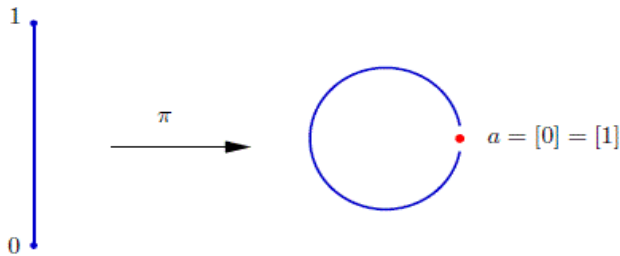
Ma andiamo per gradi; cominciamo con un caso semplice.

Generare un cerchio (o meglio una curva chiusa) con un segmento.

Come possiamo nella realtà fisica generare un cerchio partendo da un segmento? Pensiamo ad un filo di ferro: basta incollarne gli estremi.

La stessa procedura la dobbiamo fare matematicamente.

Prendiamo come $X=[0,1]$, che è un intervallo chiuso, sottoinsieme di \mathbf{R} .



consideriamo la relazione d'equivalenza in X :

$$t \sim t' \Leftrightarrow t = t' \text{ oppure } t, t' \in \{0, 1\}$$

se $t=0$ o $t=1$ i due punti sono equivalenti, quindi la classe di equivalenza possiamo chiamarla indifferentemente $[0]=[1]=a$

Se invece i punti sono interni al segmento aperto $(0,1)$ la relazione d'equivalenza diventa banale: ogni punto è equivalente solo a se stesso.

Quindi la proiezione π manda i punti interni al segmento $(0,1)$ in se stessi, mentre manda sia 0 che 1 in a .

Per ora, per quanto detto sopra, siamo solo sicuri che l'insieme quoziente è uno spazio topologico.

Intuitivamente si capisce che è proprio come se piegassimo il nostro filo incollandolo in a , ottenendo una curva chiusa.

Non possiamo ancora dirlo; dovremmo dimostrare che lo spazio topologico ottenuto è omeomorfo ad un cerchio.

E infatti è proprio così, ma ancora non abbiamo gli strumenti per dimostrarlo.

Siamo quasi pronti per la costruzione di spazi più complessi, fra cui il nastro do Möbius, il procedimento sarà sempre questo, ma prima parliamo di “***Superfici e Varietà topologiche***”.

Superfici e varietà topologiche.

Consideratelo un breve intermezzo prima della matematizzazione del nastro di MÖBIUS; il nastro è una superficie topologica, che può avere delle determinate proprietà.

Ma cos'è una superficie topologica? Quali sono queste proprietà? Dobbiamo ancora definirle.

Le definizioni introdotte **non sono** banali, e presuppongono la conoscenza di quanto riportato da questi articoli di topologia.

Parleremo non solo di superfici ma anche di varietà; la definizione è la stessa, cambia solo la dimensione.

La definizione di varietà che troverete in questo articolo è per così dire "*autonoma*", ed è fondata solo sulla Topologia.

Prima però, una ulteriore precisazione sugli spazi Topologici: la separazione:

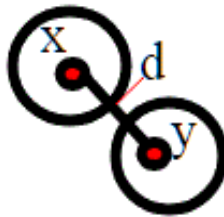
Spazi di Hausdorff.

Uno spazio topologico S è detto di **Hausdorff** se per ogni coppia x, y di elementi distinti di S esistono un intorno di x e un intorno di y disgiunti.

In tal caso lo spazio si dice separato.

Come si può facilmente verificare, ogni spazio **metrico** è di Hausdorff.

Non è però vero in generale per ogni spazio topologico.



in uno spazio topologico, dove è definita la distanza, basta prendere come intorni due dischi con centro in x, y e raggio $r < d/2$.

Noi tratteremo in questo contesto solo Spazi di Hausdorff.

Atlanti e carte geografiche

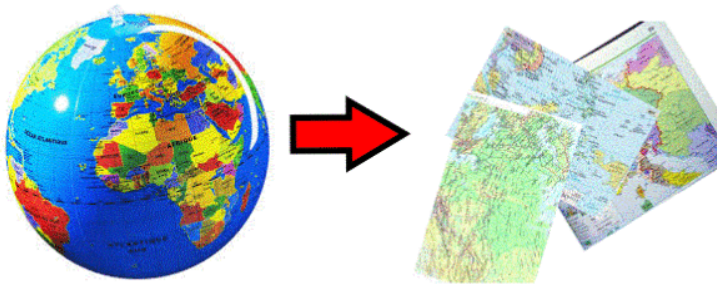
Lo studio topologico delle superfici deriva sostanzialmente dalla geografia. La sfera (schematizzazione della superficie terrestre) può essere rappresentata sul piano tramite un atlante di carte geografiche.

Purtroppo non è possibile usare solo una carta (ovvero un solo omeomorfismo), perché la sfera non è omeomorfa ad un piano.

Localmente invece, si trovano degli aperti sulla sfera che lo sono.

Le funzioni che trasformano gli aperti della sfera in aperti del piano sono degli omeomorfismi che però non conservano le distanze; le carte permettono di introdurre coordinate locali (nel caso specifico la longitudine e la latitudine).

Infatti l'immagine di un punto della sfera è un punto nel piano R^2 , dove esistono le coordinate (x,y) .



Possiamo pensare alla sfera (terra) come ad un puzzle tridimensionale. Tutti gli elementi che lo compongono ricoprono interamente la sfera e una volta "stirati" con un omeomorfismo formano un insieme di carte geografiche, ovvero un atlante.



Noi che viviamo sulla superficie della terra, sperimentiamo direttamente ogni giorno che "**localmente**" la superficie della terra assomiglia ad un piano euclideo.

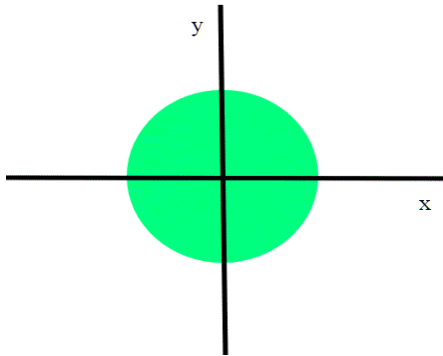
Spazi topologici localmente euclidei.

\mathbb{R}^n è un particolare spazio topologico, ed altro non è che lo spazio Euclideo, munito di coordinate.

In esso abbiamo la **distanza pitagorica**, quindi possiamo definire gli aperti chiamati bolle :

$$B_r^n(x) = \{y \in X \text{ tali che } d(x, y) < r\}.$$

Le abbiamo viste negli spazi metrici. Un aperto particolarmente semplice, è il disco di raggio unitario con centro nell'origine, che chiamiamo D^n .

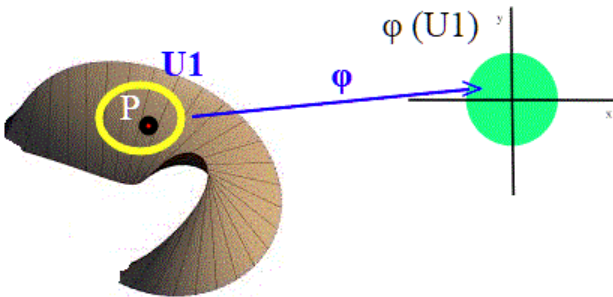


Un disco aperto nel piano

Uno spazio topologico X si dice localmente euclideo se ogni suo punto x ha un intorno aperto U_i omeomorfo a un disco aperto D^n in R^n (o equivalentemente a tutto R^n).

Chiamiamo $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\cong} D^n$;

La coppia (U_i, φ_i) si chiama **carta locale**.



Lo spazio S è localmente euclideo se per ogni punto P esiste un intorno che lo contiene ed è omeomorfo a un disco dello spazio euclideo.

Non fatevi spaventare dai formalismi e dagli indici; come nella figura prendiamo un punto \mathbf{P} qualsiasi; se lo spazio è localmente euclideo esiste un intorno aperto U e una applicazione continua e invertibile (omeomorfismo) φ tale che la sua immagine $\varphi(U)$ sia un aperto di R^n .

Uno spazio topologico connesso (fatto di un solo pezzo), di Hausdorff, e localmente euclideo **si dice varietà topologica**.

Chiaramente adesso salta fuori il discorso sulla dimensione di tale varietà, che è proprio l' n di R^n .

Tramite un omeomorfismo una curva va in una curva, una superficie va in una superficie, un solido va in un solido, infatti si conserva la dimensione (le curve, le superficie, i solidi hanno rispettivamente dimensione uguale a 1; 2; 3);

Se $n=2$, abbiamo una varietà topologica di dimensione due, che è detta **superficie topologica**.

E' da notare che queste varietà introdotte solo così, dal punto di vista topologico, non richiedono nessuna immersione in nessun spazio. Sono , per così dire, autonome.

Ricoprimenti e atlanti in topologia.

Restiamo per ora nell'ambito delle superfici.

In generale, chiamiamo **ricoprimento** di uno spazio topologico S , una famiglia di insiemi U_i tali che $S = \cup_i U_i$, ovvero la loro unione dà tutto S .

Sia allora $S = \cup_i U_i$ una superficie.

Se per ogni U_i esiste un omeomorfismo φ_i :

$$\varphi_i : U_i \xrightarrow{\text{omeomorfismo}} D^2,$$

dove $D^2 = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, allora siamo in grado di trasformare un aperto della topologia di S in un disco del piano.

Come già detto, la coppia (U_i, φ_i) si chiama **carta** e l'insieme di tutte le carte $A = \{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}\}$ si chiama **atlante**.

Quindi ogni superficie ammette un atlante.

(possiamo estendere questa definizione di atlante alle varietà n -dimensionali, sostituendo D^n a D^2).

Spazi Compatti.

Parliamo di spazi, perché la compattezza è un concetto che non riguarda solo le superfici.

Nell'esempio citato delle mappe e degli atlanti, sappiamo che per costruire un atlante della terra bastano un numero finito di mappe.

Quindi la superficie della terra, come quella della sfera, è finita.

Dato uno spazio topologico S , per dire se è compatto dobbiamo verificare, per ogni una famiglia di aperti U_i tale che la loro unione dia S , se questo riusciamo a realizzarlo con un numero finito di questi aperti.

Dunque uno spazio topologico è compatto se ammette un **sottoricoprimento** finito, per ogni ricoprimento aperto.

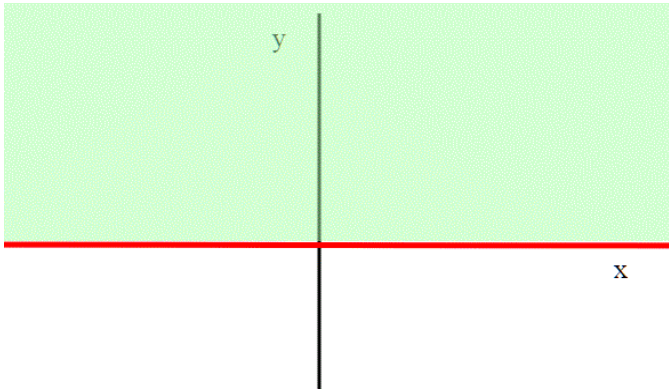
Gli esempi più noti di spazi compatti sono la sfera e il toro.

Superfici con bordo

Negli spazi R^n è relativamente facile definire il bordo di un semispazio. Pensiamo ad esempio al bordo di un tavolo.

Consideriamo il semipiano di R^2 definito da:

$$R_+^2 = \{(x, y) : y \geq 0\}.$$



In pratica la zona in verde unita alla linea rossa.

Chiamiamo **bordo** del semipiano la retta (rossa) di equazione: $y=0$.

Tale bordo viene indicato con ∂R_+^2 .

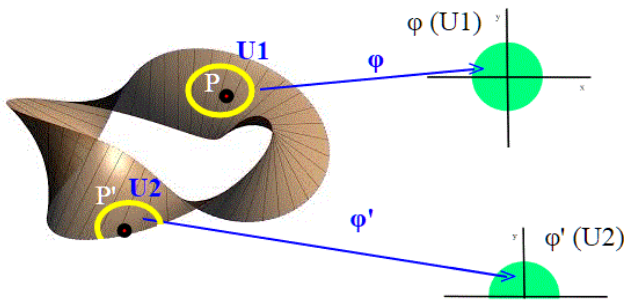
Definire il bordo in R^2 ci permette, tramite gli omeomorfismi, di definire i bordi in una superficie qualsiasi.

Definiamo allora le superfici topologiche con bordo; intuitivamente, una superficie con bordo assomiglia (cioè è localmente omeomorfa) ad un disco o ad un semidisco; i punti di M che hanno intorno che somigliano (cioè sono omeomorfi) ad un semidisco costituiscono il bordo ∂S della superficie.

Gli altri punti sono detti punti interni.

I punti del bordo sono "**intrinsecamente**" differenti dai punti della superficie S privata del bordo ∂S .

Se il bordo di una superficie è vuoto, ($\partial S = \emptyset$), la superficie è senza bordo.



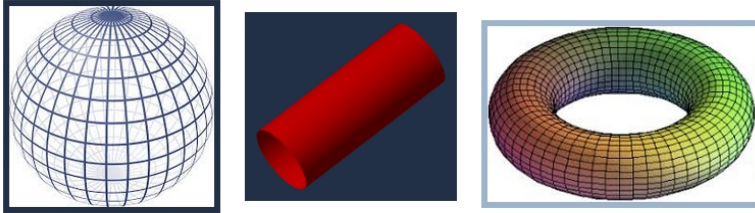
una superficie con bordo.

In una superficie abbiamo a disposizione un atlante; esistono perciò degli omeomorfismi φ_i definiti su ogni aperto che contiene ogni punto della superficie; i punti P per cui $\varphi_i(P)$ appartiene al bordo ∂R_+^2 sono i punti del bordo ∂S di S .

Se $\partial S = \emptyset$ la superficie si dice senza bordo. Anche i bordi sono delle **varietà**; in questo caso ogni punto del bordo è omeomorfo alla retta $y=0$, ed ha dimensione $n-1$, ovvero $2-1=1$ (è una curva).

Una sfera non ha bordo, mentre il cilindro ne ha due, e sono le due circonferenze di base.

Il toro non ha bordi.



NB. La definizione di bordo può essere estesa alle varietà qualsiasi, di dimensione n .

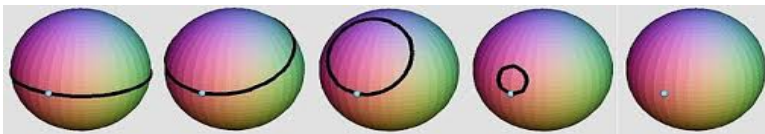
Basta sostituire al semipiano $R_+^2 = \{(x, y) : y \geq 0\}$ il semispazio $R_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_n \geq 0\}$, e come bordo ∂R_+^n l'iperpiano di equazione $x_n = 0$.

Dopodichè, si considera l'immagine del bordo tramite gli omomorfismi che definiscono la superficie.

Spazi semplicemente connessi.

Uno spazio topologico si dice semplicemente connesso se è connesso per archi e ogni curva chiusa giacente su di esso può essere deformata fino a ridursi a un singolo punto (appartenente sempre alla superficie). Intuitivamente uno spazio è semplicemente connesso quando è privo di "buchi".

Dunque, ad esempio, la sfera risulta essere semplicemente connessa, mentre il toro non è semplicemente connesso.



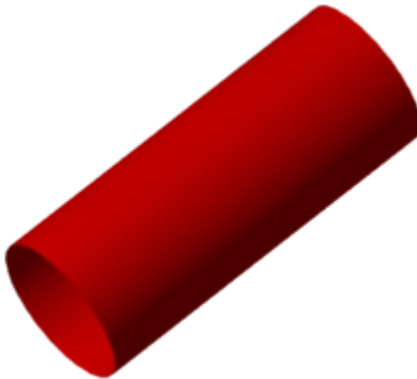
Un esempio di curva chiusa ,giacente su una sfera, che si riduce ad un punto. (immagine tratta da wikipedia).



Nel toro, la presenza di un buco fa sì che non tutte le curve giacenti su di esso siano deformabili ad un punto.

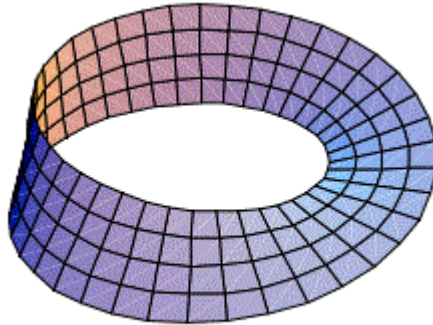
Superfici orientabili e non orientabili

Riprendiamo in mano il nostro cilindro con due bordi. Intuitivamente non facciamo nessuna fatica a pensare che il cilindro abbia un "dentro" e un "fuori" ovvero due facce.



E' possibile colorare la superficie del cilindro con due colori diversi, uno per la parte esterna e uno per la parte interna.

Si dice in questo caso che la superficie del cilindro è orientabile.
Questa è la definizione "antica" di **superficie orientabile**.
In pratica non è possibile passare da una faccia all'altra senza attraversare il bordo o bucando la superficie.



A questo punto, i matematici dicono semplicemente: una superficie **non è orientabile** se e solo se contiene un nastro di MÖBIUS .
Questa è una definizione moderna di orientabilità.
Più avanti vedremo in dettaglio la costruzione di queste due superfici (cilindro e nastro) usando la “**topologia quoziente**”.

Un Teorema necessario.

Nell'articolo precedente, abbiamo realizzato un primo esempio di Spazio quoziente. Chi vuole riprendere il discorso da lì, può visualizzare l'esempio. Chi invece non lo ritenga necessario, può andare avanti direttamente.

Una definizione alternativa di continuità.

La definizione di continuità che abbiamo dato precedentemente, relativamente agli spazi topologici, era la seguente:

Una funzione $f: X \rightarrow Y$ fra due spazi topologici è continua se per ogni aperto A di Y , $f^{-1}(A)$ è un aperto di X .

Alternativamente, invece di usare gli aperti, si possono usare gli insiemi chiusi:

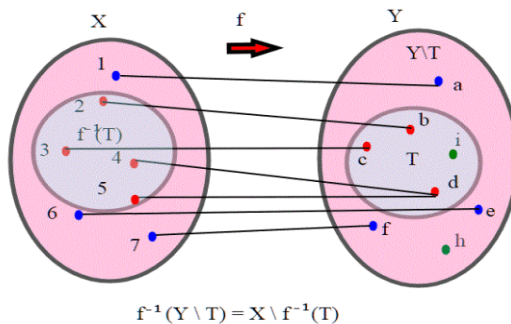
Una funzione $f: X \rightarrow Y$ fra due spazi topologici è continua se per ogni chiuso C di Y , $f^{-1}(C)$ è un chiuso di X .

Per dimostrare questa affermazione, basta notare questa proprietà delle controimmagini, puramente a livello insiemistico:

Se T è un sottoinsieme di X , f una funzione qualsiasi di $f: X \rightarrow Y$, allora vale la seguente eguaglianza:

$$f^{-1}(Y - T) = X - f^{-1}(T).$$

Ricordo che, se T è un sottoinsieme di Y , il complementare è $Y \setminus T$.



Spero che questa figura basti per giustificare il risultato.

La f considerata non è biettiva e nemmeno suriettiva per non cadere in casi particolari.

Infatti, se vale tale eguaglianza, se C è un insieme chiuso, allora $Y \setminus C$ è aperto, quindi $f^{-1}(Y \setminus C)$ è aperto, ma allora, anche $X \setminus f^{-1}(C)$ è aperto, di conseguenza $f^{-1}(C)$ è chiuso.

Analogamente si può dimostrare il viceversa.

Definizione di funzione aperta (o chiusa)

- Una funzione $f : X \rightarrow Y$ tra spazi topologici si dice aperta se per ogni aperto $A \subseteq X$, $f(A) \subseteq Y$ è aperto.
- Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice chiusa se per ogni chiuso $C \subseteq X$, $f(C)$ è chiuso in Y .

Le funzioni inverse; proprietà.

Per chi non ha ben chiaro il concetto di funzione inversa, e in particolare il fatto che $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$ **qualsiasi sia** x , richiamo alcune proprietà.

Chi vuole può fare a meno di leggere tale proprietà, e continuare tranquillamente la lettura.

Un'altra definizione di omeomorfismo.

Abbiamo già dato la definizione di omeomorfismo:

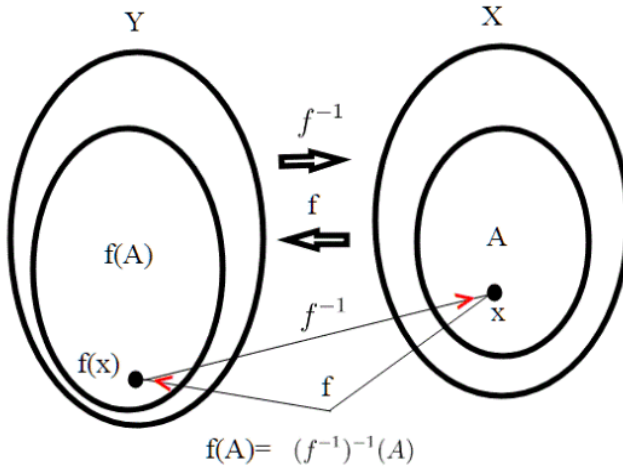
"Una funzione $f: X \rightarrow Y$ fra spazi topologici è un omeomorfismo se f è continua, biettiva e la sua inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ è anch'essa continua."

Una definizione equivalente è questa:

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ tra due spazi topologici è un omeomorfismo se e solo se f è continua, biettiva e aperta (oppure chiusa).

In pratica, sotto queste condizioni, dobbiamo dimostrare che anche f^{-1} è continua.

Sappiamo che qualsiasi sia $x \in X$, $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$;



Supponiamo f aperta; quindi per ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ aperto, si ha che:
 $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$

Quindi f^{-1} è continua se e solo se f è aperta, ovvero se l'immagine di ogni aperto tramite f è un aperto.

Supponiamo f chiusa, e consideriamo un chiuso $C \subseteq X$:

$$f(C) = (f^{-1})^{-1}(C).$$

Quindi f^{-1} è continua se e solo se f è chiusa, ovvero se l'immagine di ogni aperto tramite f è un aperto.

Spazi compatti.

Richiamo la definizione di spazio compatto, che abbiamo dato in “Varietà topologiche”:

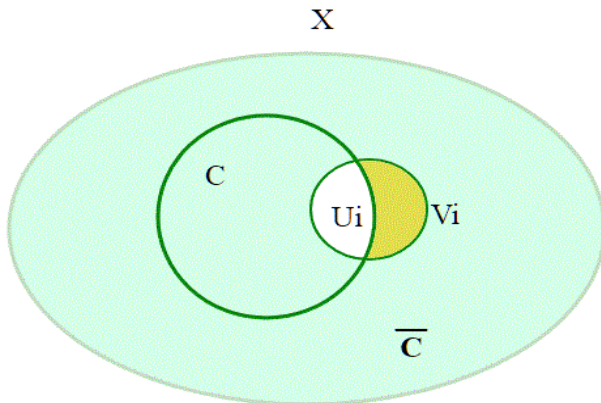
“... dato uno spazio topologico S , per dire se S è compatto dobbiamo verifi-

care, per ogni una famiglia di aperti U_i tale che la loro unione dia S , se questo riusciamo a realizzarlo con un numero finito di questi aperti.

Dunque uno spazio topologico è compatto se ammette un sottoricoprimento finito, per ogni ricoprimento aperto.

Sempre nello stesso articolo, è spiegato per esteso cos'è un ricoprimento. Vedremo ora due importanti teoremi sugli spazi compatti.

a) Un sottoinsieme chiuso C di uno spazio compatto X è uno spazio compatto (con la topologia indotta).

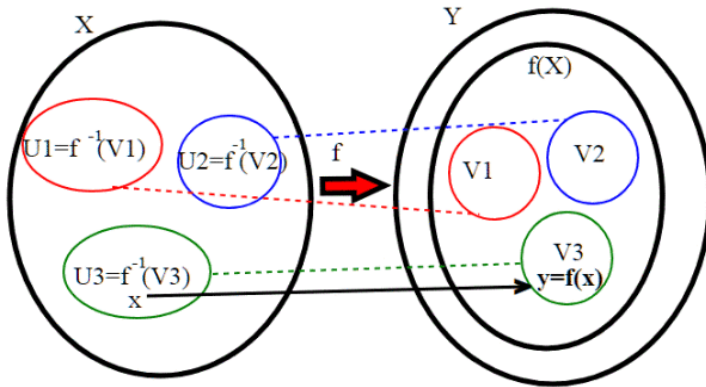


Gli aperti U_i di C (in bianco) sono l'intersezione di C con gli aperti V_i di X

Sia $U = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di C ; poiché C ha la topologia indotta, $U_i = V_i \cap C$, con V_i aperto di X .

$V = \{\{V_i\}_{i \in I}, \tilde{C}\}$ (dove \tilde{C} è il complementare di C che quindi è aperto essendo il complementare di un chiuso) è un ricoprimento aperto di X ; poiché X è compatto è possibile estrarre un sottoricoprimento finito $\{V_1, \dots, V_n, \tilde{C}\}$; allora $\{U_1, \dots, U_n\}$ è un sottoricoprimento finito di U .

b) Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua, e sia X uno spazio compatto. Allora $f(X)$ è uno spazio compatto.



Sia $V = \{V_j\}_{j \in I}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$; essendo f continua $U = \{U_j = f^{-1}(V_j)\}_{j \in I}$ è un ricoprimento aperto di X .

Ma X è uno spazio compatto, quindi ammette un sottoricoprimento finito, $\{U_j = f^{-1}(V_j)\}_{j=1, \dots, n}$.

Ma allora $\{V_1, \dots, V_n\}$ è un sottoricoprimento finito di V ; infatti preso un y qualsiasi in $f(X)$, esiste un $x \in X$ tale che $y = f(x)$.

X è tutto ricoperto dagli U_j , quindi $x \in U_k$ per qualche k .

Di conseguenza $y \in V_k$.

Quindi anche $f(X)$ è compatto.

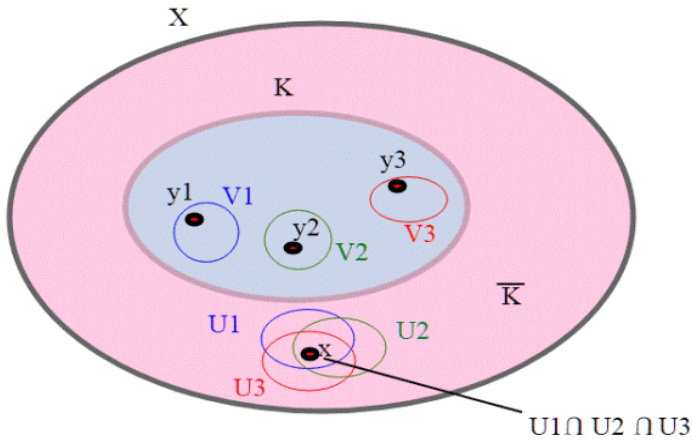
c) **(Compatto di Hausdorff) Un sottoinsieme compatto K di uno spazio di Hausdorff X è un sottoinsieme chiuso.**

Abbiamo di recente definito gli spazi di Hausdorff;

Uno spazio topologico S è detto di Hausdorff se per ogni coppia x, y di elementi distinti di S esistono un intorno di x e un intorno di y disgiunti.

In tal caso lo spazio si dice separato.

Ma veniamo alla dimostrazione; per dimostrare che K è chiuso basta dimostrare che il suo complementare in X , \tilde{K} , è aperto.



Consideriamo un punto x qualsiasi, $x \in \tilde{K}$.

Se riusciamo a trovare un aperto che lo contiene, allora x è un punto interno a \tilde{K} , quindi essendo x qualsiasi, \tilde{K} è aperto.

K è compatto; esiste allora un ricoprimento di $\forall y$ aperti.

Per ciascun $\forall y$, visto che x è distinto da ogni punto y di K , ci sarà un corrispondente U_y che contiene x , ma disgiunto da $\forall y$.

Essendo K compatto, ammette un sottoricoprimento finito.

Sia V_1, V_2, \dots, V_n un tale ricoprimento.

Siano U_1, U_2, \dots, U_n degli aperti corrispondenti; tutti contengono x .

Pertanto $U = \bigcap_{1, \dots, n} U_i$ è un aperto e contiene x , ed è anche disgiunto da K ,

ovvero $U \cap K = \emptyset$.

Pertanto x è interno a \tilde{K} , che quindi è aperto, e K che è il complementare è chiuso.

Eccoci arrivati al nostro teorema:

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e biunivoca.

Se X è compatto e Y è di Hausdorff allora è un omeomorfismo.

Per dimostrarlo, sfruttiamo i risultati precedenti.
Riportiamo quanto detto sopra riguardo agli omeomorfismi:

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ tra due spazi topologici è un omeomorfismo se e solo se f è continua, biettiva e aperta (oppure chiusa).

Ci basta quindi dimostrare che f è chiusa. Sia C un chiuso di X ;

- a) C è chiuso in X compatto, quindi C è compatto.
- b) L'applicazione f è continua, quindi $f(C)$ è compatto in Y .
- c) Poiché Y è di Hausdorff, $f(C)$ è chiuso.

Bene, abbiamo già finito.

Il cilindro e il nastro.

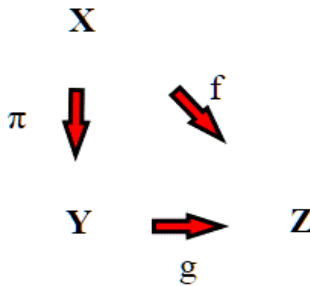
Vogliamo adesso occuparci di superfici.

In topologia possiamo costruire nuovi spazi usando la topologia quoziente. Come vedremo, la descrizione dello spazio quoziente è più semplice rispetto alla descrizione analitica della superficie immersa.

Le funzioni quoziente, richiami.

Gli spazi che vogliamo costruire in modo astratto con la topologia quoziente, *quasi sempre* sono già noti in \mathbb{R}^n , dove hanno una loro rappresentazione analitica.

Non sono chiaramente lo stesso spazio; da una parte abbiamo la topologia quoziente, definita in modo astratto, dall'altra la topologia definita in \mathbb{R}^n . Nell'esempio delle funzioni quoziente, il segmento con gli estremi incollati non è proprio un cerchio in \mathbb{R}^2 , però è omeomorfo a tale cerchio. Questo è il concetto che vorrei chiarire bene.



Abbiamo dunque il nostro spazio topologico X e una relazione di equivalenza che ci permette di costruire il nostro spazio quoziente $Y = X / \sim$; abbiamo poi al solito, la proiezione π che ad ogni elemento di X associa la propria classe.

Si dice che una funzione $f: X \rightarrow Z$ discende al quoziente se esiste $g: Y \rightarrow Z$ tale che $f = g \circ \pi$.

La funzione g è detta **funzione quoziente** di f .

Si verifica che una funzione $f: X \rightarrow Z$ discende al quoziente se assume lo stesso valore su tutti i punti di una stessa classe di equivalenza, ovvero se e solo se f soddisfa la proprietà:

$$* p \sim q \Rightarrow f(p) = f(q)$$

Se esiste una funzione con questa caratteristica, possiamo definire $g([p]) = f(p)$ e la proprietà $*$ garantisce che è ben definita (ossia indipendente dal rappresentante della classe $[p]$).

Esempi di superfici.

Mettiamoci ora nel piano, e consideriamo un quadrato:

$$X = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq R^2.$$

Questo quadrato sarà la nostra striscia di gomma, o di carta, da incollare nei bordi.

E' infatti facile, per costruire per esempio un cilindro, incollare due lati opposti di un quadrato, mantenendo lo stesso orientamento sui lati.

Noi però dobbiamo fare queste operazioni di incollatura topologicamente. Sembra impossibile che una cosa così semplice sia il punto di partenza per costruzioni di spazi molto complicati concettualmente.



Questo tipo di figura la troverete decine di volte in qualsiasi trattato di topologia.

In rosso sono segnati i lati da incollare, mentre le frecce danno il verso dell'orientamento.

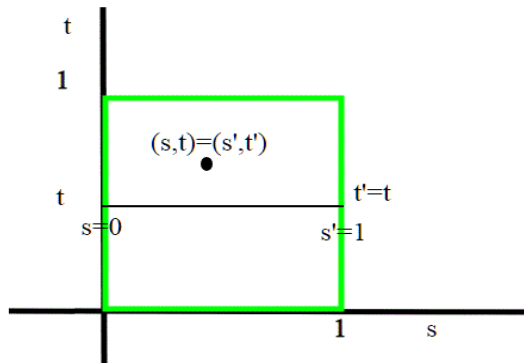
Il cilindro

Partiamo dalla figura più semplice, il cilindro, o meglio la superficie laterale del cilindro.

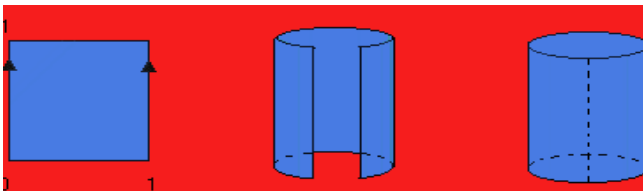
Prendiamo dunque il nostro foglio di gomma e incolliamo i due bordi opposti.

Matematicamente questo corrisponde a definire una relazione di equivalenza su un quadrato X , in modo di considerare lo stesso punto i punti equivalenti.

Una relazione d'equivalenza definita sul quadrato X potrebbe essere questa: $(s, t) \sim (s', t') \iff (s, t) = (s', t')$ oppure $\{s, s'\} = \{0, 1\}$ e $t = t'$.



I punti interni al quadrato sono equivalenti solo a se stessi, mentre il lato sinistro verticale viene ad essere identificato dalla relazione con quello destro verticale. Infatti, $(0, t) \sim (1, t)$.



Riassumendo: X è un quadrato, mentre lo spazio quoziente X/\sim è intuitivamente un cilindro C .

Siamo quindi passati dal piano allo spazio perché per piegare il foglio dobbiamo uscire dal piano.

Vorrei riflettere più a fondo su questo fatto.

Intuitivamente, visto che possiamo farlo anche nella realtà, sappiamo che incollando in tal modo i lati di un quadrato costruiamo un cilindro.

Nella realtà topologica, tale spazio non è proprio un cilindro, ovvero quello che conosciamo da sempre.

Dobbiamo usare un linguaggio topologico: lo spazio X/\sim è omeomorfo al cilindro C .

Proviamo a costruire il cilindro in altro modo, sempre con la topologia quoziente, per approfondire questo fatto con le **funzioni quoziente**.

Consideriamo il rettangolo del piano $X=[0,2\pi] \times [0,1]$.

Su X consideriamo la relazione di equivalenza:

$(0, v) \sim (2\pi, v)$ (tutti gli altri punti sono equivalenti solo a se stessi)

Dal passaggio al quoziente otteniamo lo spazio X/\sim .

Pensiamo adesso al cilindro che conosciamo; la sua equazione parametrica nello spazio sarà:

$f:(u, v) \rightarrow (\cos u, \sin u, v)$: questo è proprio il cilindro C . $f:X=[0, 2\pi] \times [0,1] \rightarrow Z$ dove Z è un sottoinsieme di R^3 .

Quello che vogliamo dimostrare, è che esiste un omeomorfismo:

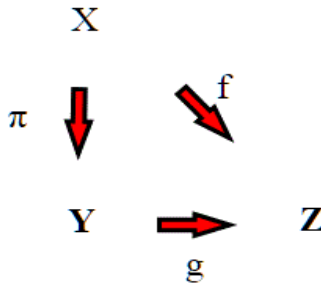
$$g:X/\sim \rightarrow C.$$

Verifichiamo la proprietà *:

$$p \sim q \Rightarrow f(p) = f(q)$$

sappiamo che $(0, v) \sim (2\pi, v)$;

$f(0, v) = (\cos 0, \sin 0, v) = (1, 0, v)$; $f(2\pi, v) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi, v) = (1, 0, v)$
quindi $f(0, v) = f(2\pi, v)$.



f è continua, quindi per la proprietà fondamentale del quoziente anche g è continua, g è inoltre iniettiva. Infatti è definita come $g([p])=f(p)$; se $g([p])=g([q])$, allora $f(p)=f(q)$ ma questo succede solo se $p \sim q$.

Possiamo allora applicare il nostro **teorema necessario**:

Sia $g : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e biunivoca. Se Y è compatto e Z è di Hausdorff allora g è un omeomorfismo.

Si consideri che g è continua e biunivoca.

E' definita su Y che è un compatto, essendo immagine del compatto $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ tramite π .

Z (il cilindro) è di Hausdorff, essendo un sottospazio di \mathbb{R}^3 .

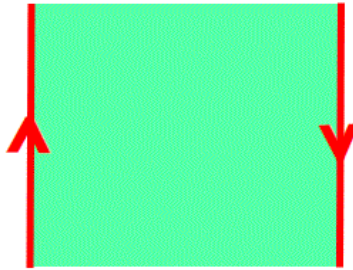
Quindi g è un omeomorfismo.

Il cilindro costruito incollando i due lati di un quadrato è quindi omeomorfo al cilindro immerso in \mathbb{R}^3 , con espressione analitica data da

$$f: (u, v) \rightarrow (\cos u, \sin u, v).$$

Il nastro di Möbius

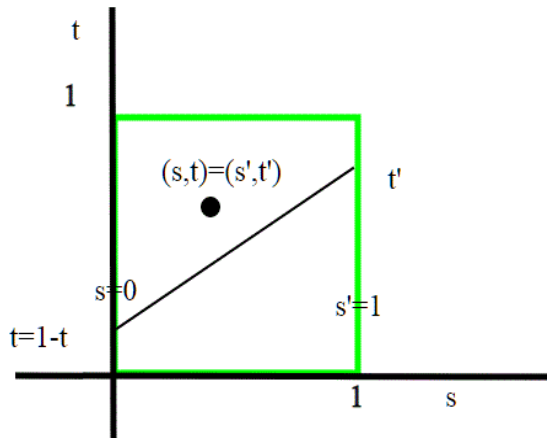
Come può essere intuibile, per costruire il nastro dobbiamo incollare i lati opposti di una striscia dopo averne ruotato uno di 180 gradi.



A differenza dello schema di costruzione del cilindro, nel nastro i lati opposti da incollare subiscono un cambio di orientamento, corrispondente ad una rotazione di 180° di uno dei due lati.

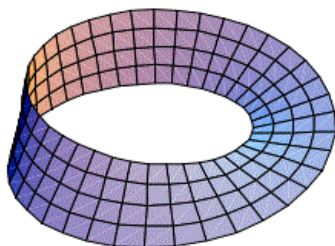
Se prendiamo come per il cilindro il quadrato:

$Q = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$, possiamo considerare su di esso la relazione di equivalenza $(s, t) \sim (s', t') \iff (s, t) = (s', t')$ oppure $\{s, s'\} = \{0, 1\}$ e $t = 1 - t'$.



I punti interni al quadrato sono equivalenti a se stessi come nel caso del cilindro, mentre in questo caso $(1, t) \sim (0, 1-t)$.

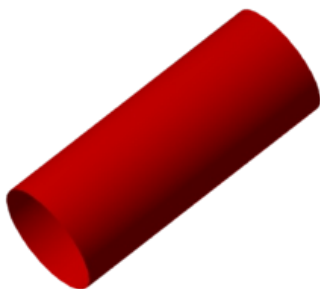
La figura che intuitivamente si ottiene è proprio il nastro di Möbius:



Esistono rappresentazioni parametriche del nastro in R^3 , ma sono però molto più complesse di quelle del cilindro. Anche per esse si può dimostrare l'omeomorfismo con lo spazio quoziente generato in modo astratto tramite incollamento. Per ora non lo facciamo; prima bisognerà ricavare una espressione parametrica per il nastro nello spazio.

Si può dimostrare che sia il cilindro che il nastro sono due **varietà topologiche**; riprendo adesso parte dell'articolo per spiegare una differenza fondamentale fra le due superfici l'**orientabilità**:

Riprendiamo in mano il nostro cilindro con due bordi. Intuitivamente non facciamo nessuna fatica a pensare che il cilindro abbia un "dentro" e un "fuori" ovvero due facce.



E' possibile colorare la superficie del cilindro con due colori diversi, uno per la parte esterna e uno per la parte interna.

Si dice in questo caso che la superficie del cilindro è orientabile.

Questa è la definizione "antica" di **superficie orientabile**.

In pratica, come già detto, non è possibile passare da una faccia all'altra senza attraversare il bordo o bucando la superficie.

Il Toro

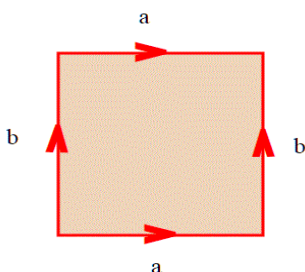
Adesso che stiamo prendendo mano con la topologia quoziente, cominciamo a costruire superfici un po' più complicate.

Fino ad ora abbiamo incollato solo due dei quattro lati del quadrato, ottenendo delle figure "aperte".

Vogliamo provare ad incollarli a due a due.

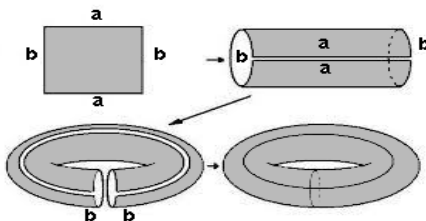
Iniziamo a costruire un toro, partiamo sempre dalla nostra striscia, anche questa volta quadrata, $X = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

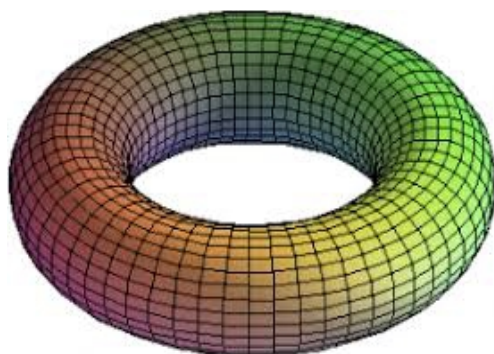
Lo schema della costruzione è questo:



Dapprima incolliamo i due lati a , nello stesso verso, poi i due lati b , sempre nello stesso verso.

Con la prima operazione otteniamo un cilindro, con due bordi circolari; se piegandolo incolliamo i due bordi (pensate a un tubo di gomma), otteniamo proprio il nostro salvagente (Toro).

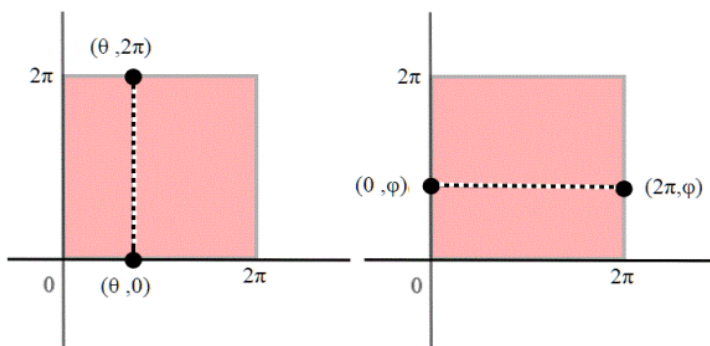




Questo nella pratica; ma noi dobbiamo trovare una relazione d'equivalenza che identifichi i lati b,b e i lati a,a.

Consideriamo la relazione sul quadrato $X = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ in cui le equivalenze non banali sono $(\theta, 0) \sim (\theta, 2\pi)$ e $(0, \phi) \sim (2\pi, \phi)$.

Al solito, tutti i punti interni al quadrato sono equivalenti solo a se stessi.



Il toro che abbiamo costruito in modo astratto, lo chiamiamo "toro topologico", ed è il quoziente del quadrato rispetto alla relazione di equivalenza sopra descritta.

Ma è proprio il toro che conosciamo? Dobbiamo dimostrare che X/\sim è omeomorfo al toro immerso nella spazio.

$R > r$

$$x_P = x_K + \overline{KH} \cos \theta = R \cos \theta + r \cos \varphi \cos \theta$$

$$y_P = y_K + \overline{KH} \sin \theta = R \sin \theta + r \cos \varphi \sin \theta$$

$$z_P = r \sin \varphi$$

Costruiamo l'omeomorfismo.

Chiamiamo f l'equazione parametrica appena vista.

Quello che vogliamo dimostrare ora, è che esiste un omeomorfismo

$$g: X / \sim \rightarrow Z.$$

dove Z è l'immagine di X tramite f ($Z=f(X)$). Verifichiamo la proprietà:

$$p \sim q \Rightarrow f(p) = f(q)$$

$$f: (\theta, \phi) \mapsto ((R+r \cdot \cos \phi) \cos \theta, (R+r \cdot \cos \phi) \sin \theta, r \cdot \sin \phi)$$

$$1 \text{ se } (\theta, 0) \sim (\theta, 2\pi),$$

$$f(\theta, 0) = (R+r) \cos \theta, (R+r) \sin \theta, 0,$$

$$f(\theta, 2\pi) = (R+r) \cos \theta, (R+r) \sin \theta, 0$$

$$\text{per cui } f(\theta, 0) = f(\theta, 2\pi)$$

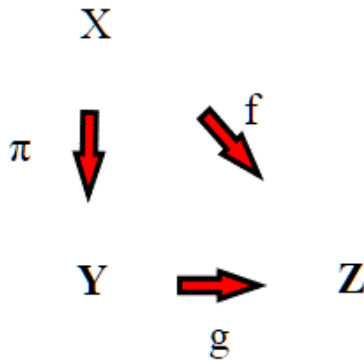
$$2 \text{ se } (0, \phi) \sim (2\pi, \phi)$$

$$f(0, \phi) = (R+r \cos \phi), 0, r \sin \phi$$

$$f(2\pi, \phi) = (R+r \cos \phi), 0, r \sin \phi$$

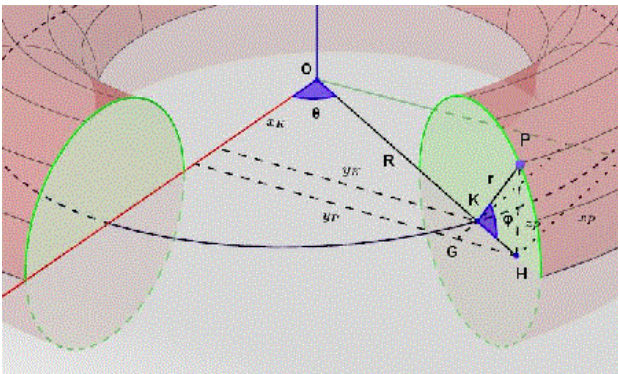
$$\text{per cui } f(0, \phi) = f(2\pi, \phi).$$

Quindi possiamo porre $g([p]) = f(p)$ essendo g ben definita, ovvero indipendente dal rappresentante della classe.



Considerare che f è continua, quindi per la proprietà fondamentale del quoziente anche g è continua.

Torniamo adesso all'equazione parametrica di f . f non è iniettiva.



Abbiamo due parametri θ, ϕ che variano fra $[0, 2\pi]$.

Sia θ arbitrario ma fissato, ma interno all'intervallo, ossia:

$\theta \ll 0, \theta \ll 2\pi$.

In corrispondenza avremo una circonferenza di raggio r .

I punti di tale circonferenza al variare di ϕ fra $[0, 2\pi]$ descrivono punti P della superficie del toro.

Tali punti hanno valori univoci di ϕ , ad eccezione del punto che si ottiene

per $\phi=0$ in quanto tale punto si ottiene anche per $\phi = 2\pi$.

Al variare di θ , tali punti altro non sono che la saldatura che forma il cilindro, ed hanno coordinate $(\theta, 0), (\theta, 2\pi)$.

Per $\theta = 0$ la circonferenza di raggio r viene a sovrapporsi con la circonferenza sempre di raggio r ma corrispondente a $\theta = 2\pi$.

In questo caso, al variare di ϕ tutti questi punti hanno la doppia rappresentazione $(0, \phi), (2\pi, \phi)$.

Essi rappresentano la saldatura dei due bordi del cilindro.

Notiamo allora che i punti dove la f non è iniettiva altro non sono che i punti delle equivalenze non banali descritte sopra.

g invece è iniettiva, infatti g viene applicata alle classi di equivalenza di X . Se f viene applicata ad un punto interno del quadrato, f assume lo stesso valore solo in quel punto, che è equivalente solo a se stesso.

Se invece applichiamo f ai punti dei segmenti che delimitano il quadrato, sappiamo che f assume lo stesso valore in $(\theta, 0), (\theta, 2\pi)$ e in $(0, \phi), (2\pi, \phi)$, f non è iniettiva in questi segmenti, ma sappiamo anche che i punti in essi sono equivalenti, quindi appartengono alla stessa classe. Essendo $g(\mathbf{p})=f(\mathbf{p})$ questo significa che g è iniettiva.

Possiamo allora applicare il nostro **teorema necessario**:

Sia $g : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e biunivoca. Se Y è compatto e Z è di Hausdorff allora g è un omeomorfismo.

Si consideri che g è continua e biunivoca.

E' definita su Y che è un compatto, essendo immagine del compatto:

$[0, 2\pi] \times [2\pi]$ tramite π .

Z (il toro) è di Hausdorff, essendo un sottospazio di R^3 , immagine di X ($f(X)$).

Quindi g è un omeomorfismo.

Il toro costruito con la topologia è quindi omeomorfo al toro immerso nello spazio, costruito in altro modo, ovvero come superficie di rotazione.

La Sfera

Ci sono più modi per costruire una sfera con la topologia quoziente, il più semplice consiste però nel fare il quoziente di un disco.

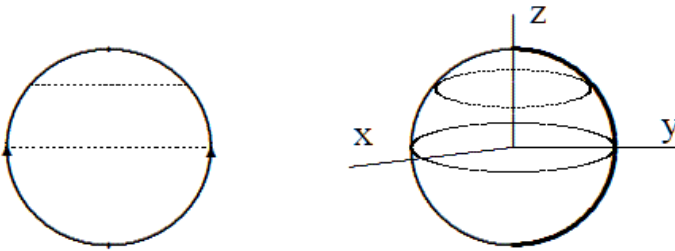
Fino adesso abbiamo fatto quozienti di quadrati e rettangoli, ma nulla ci vieta di farlo di altri sottospazi topologici.

Consideriamo dunque un disco e i punti appartenenti agli estremi di una corda orizzontale.

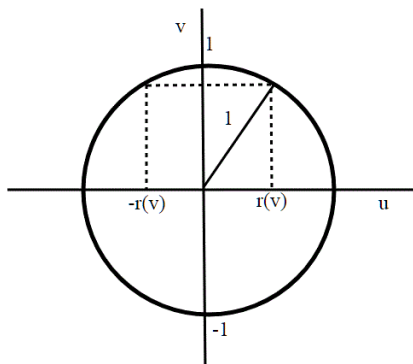
Identifichiamo i due punti come abbiamo fatto per il segmento che viene trasformato in un cerchio.

Quindi tale relazione trasforma la corda in un parallelo della sfera.

Di conseguenza, se consideriamo tutte le corde orizzontali, avremo come risultato la sfera.



Poniamo intanto sul disco unitario: $r(v) = \sqrt{1 - v^2}$.



Quali sono le equivalenze non banali? Gli estremi della corda orizzontale generica di ordinata v .

Pertanto :

$$\text{per } v \in [-1, 1], (-r(v), v) \sim (r(v), v)$$

$$\text{dove } r(v) = \sqrt{1 - v^2}.$$

(per $v=-1, v=1$ la corda si riduce ad un punto che risulta equivalente a se stesso, corrispondente ai due poli).

La funzione parametrica f che trasforma le corde orizzontali del disco nei paralleli della sfera, è la seguente:

$$f:(u, v) \rightarrow \left(r(v) \cos \frac{\pi u}{r(v)}, r(v) \sin \frac{\pi u}{r(v)}, v \right).$$

$v \neq \pm 1$ essendo $r(v) = \sqrt{1 - v^2}$ a denominatore.

La funzione f va dal disco che è il nostro spazio X in R^3 ; $f: X \rightarrow R^3$

$$f(u, v) = \left(r(v) \cos \frac{\pi u}{r(v)}, r(v) \sin \frac{\pi u}{r(v)}, v \right); \text{ se facciamo variare } v$$

nell'intervallo aperto $(-1, 1)$ otteniamo tutte le corde orizzontali del disco; fissiamo ora un valore di v .

Ciò equivale a fissare un piano $z=v$.

Sulla corda u varia da $-r(v)$ e $+r(v)$; di conseguenza l'argomento delle due funzioni seno e coseno varia da $-\pi$ a π ; quindi i due termini che rappresentano le coordinate dell'immagine sul piano $z=v$, ovvero x, y sono proprio le coordinate di un cerchio di raggio $r(v)$ che giace nel piano $z=v$.

Al variare di v in $(-1, 1)$ otteniamo quindi tutti i paralleli della sfera.

E se $(u, v) = (0, \pm 1)$? Poniamo $f((0, \pm 1)) = (0, 0, \pm 1)$ ovvero i poli della sfera. Questa scelta è sensata perché la funzione così estesa è continua, come viene sempre richiesto per i nostri teoremi.

Infatti se calcoliamo il limite:

$$\lim_{(u, v) \rightarrow (0, \pm 1)} f(u, v) = \left(r(v) \cos \frac{2\pi u}{r(v)}, r(v) \sin \frac{2\pi u}{r(v)}, v \right)$$

concentriamoci dapprima sulla prima coordinata:

$$r(v) \cos \frac{2\pi u}{r(v)} = \sqrt{1-v^2} \cos \frac{2\pi u}{\sqrt{1-v^2}}$$

Non vogliamo a questo punto affrontare i limiti di funzioni di due variabili, che richiedono varie tecniche specifiche.

Osserviamo solo che qualsiasi sia l'argomento, la funzione seno e la funzione coseno sono limitate. Il termine $r(v) = \sqrt{1-v^2}$ tende invece a zero per v tendente a ± 1 .

quindi $\left| \sqrt{1-v^2} \cos \frac{2\pi u}{\sqrt{1-v^2}} \right| \leq |\sqrt{1-v^2}| \cdot 1$ ma tendendo v

a ± 1 tale termine va a zero, analogamente per il termine in seno.

Poi chiaramente il terzo termine v tende a ± 1 .

Ciò basta per concludere che:

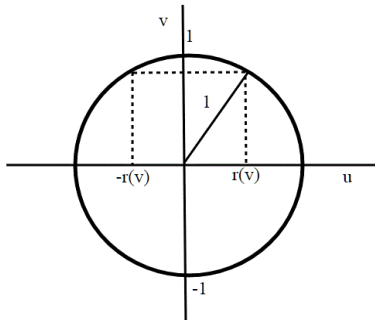
$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0, \pm 1)} f(u, v) = \left(r(v) \cos \frac{2\pi u}{r(v)}, r(v) \sin \frac{2\pi u}{r(v)}, v \right) = (0, 0, \pm 1)$$

e quindi la funzione è continua in $(0, \pm 1)$ perché assume il valore del limite.

Verifichiamo che $p \sim q \Rightarrow f(p) = f(q)$.

Sappiamo che i punti interni al disco sono equivalenti a se stessi, quindi in tal caso l'argomento della funzione è lo stesso.

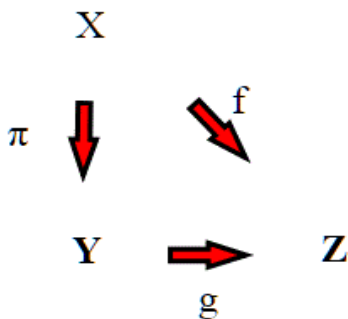
Supponiamo invece di prendere due punti sulla frontiera del disco, gli estremi di una corda $(-r(v), v) \sim (r(v), v)$.



$$f(-r(v), v) = (r(v) \cos \frac{\pi(-r(v))}{r(v)}, r(v) \sin \frac{\pi(-r(v))}{r(v)}, v) = (-1, 0, v)$$

$$f(r(v), v) = (r(v) \cos \frac{\pi(r(v))}{r(v)}, r(v) \sin \frac{\pi(r(v))}{r(v)}, v) = (-1, 0, v)$$

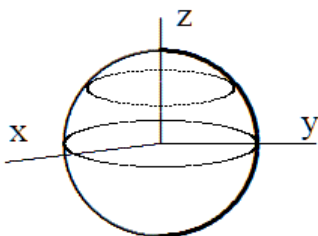
Definiamo ora la nostra $\mathbf{g}(\mathbf{p})=\mathbf{f}(\mathbf{p})$; \mathbf{g} è ben definita, ovvero indipendente dal rappresentante della classe di equivalenza.



Riprendiamo l'espressione di \mathbf{f} :

$$f(u, v) = (r(v) \cos \frac{\pi u}{r(v)}, r(v) \sin \frac{\pi u}{r(v)}, v)$$

Consideriamo che \mathbf{f} non è iniettiva. Quali sono i punti corrispondenti della sfera per cui \mathbf{f} non è iniettiva? Fissiamo un valore di \mathbf{v} diverso da ± 1 che equivale a fissare un piano $\mathbf{z}=\mathbf{v}$ nello spazio.



Su tale piano, avremo un cerchio di raggio $r(v)$, al variare dell'argomento da $-\pi$ a π .

Quali sono su tale cerchio gli unici punti coincidenti con coordinate diverse?

Quelli che si ottengono per valori dell'argomento $-\pi, \pi$ ovvero per $\mathbf{u}=-\mathbf{r}(v), \mathbf{u}=\mathbf{r}(v)$.

Quindi i punti coincidenti sono quelli con coordinate $(-r(v), v), (r(v), v)$ e corrispondono alla saldatura dei due estremi della corda.

Guarda caso, questi sono proprio i punti equivalenti, $(-r(v), v) \sim (r(v), v)$.

Quindi **anche se f non è iniettiva**, g essendo definita come $g(\mathbf{p})=\mathbf{f}(\mathbf{p})$ lo è.

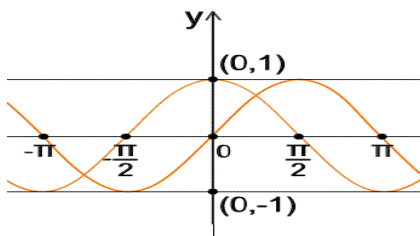


grafico di seno e coseno

Come visto più volte, grazie al **teorema necessario**: possiamo affermare che **g è un omeomorfismo fra la nostra sfera topologica** definita come quoziente del disco **e la sfera di equazione parametrica f** .

La superficie di Klein

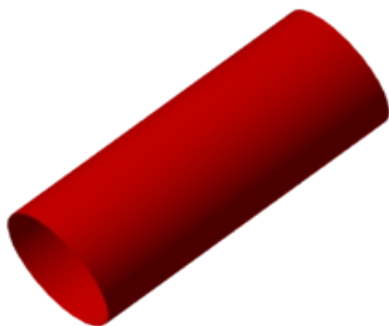
Un po' di riassunto

Negli articoli precedenti abbiamo costruito delle superfici in modo astratto, servendoci della topologia quoziente.

Abbiamo visto superfici con bordi (cilindro e nastro) e delle superfici senza bordi (toro e sfera) che sono delle superfici chiuse.

Abbiamo poi parlato di superfici orientabili e non orientabili: riprendiamo in mano il nostro cilindro con due bordi.

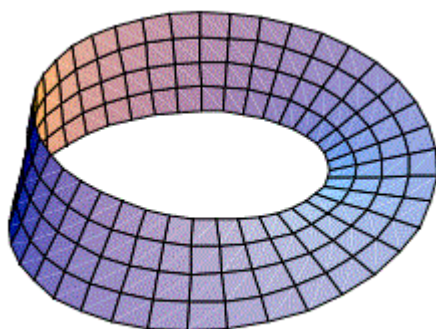
Intuitivamente non facciamo nessuna fatica a pensare che il cilindro abbia un "**dentro**" e un "**fuori**" ovvero due facce.



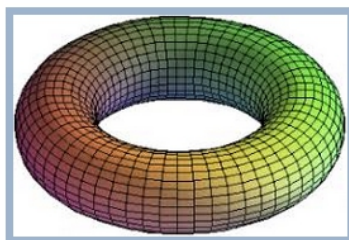
E' possibile colorare la superficie del cilindro con due colori diversi, uno per la parte esterna e uno per la parte interna. Si dice in questo caso che la superficie del cilindro è orientabile.

Questa è la definizione "antica" di **superficie orientabile**.

In pratica, come già ribadito, non è possibile passare da una faccia all'altra senza attraversare il bordo o bucando la superficie, abbiamo già visto un esempio di **superficie non orientabile**, che è proprio il nastro di MÖBIUS; nell'esempio reale, abbiamo toccato con mano l'impossibilità di colorare il nastro con due colori diversi, infatti se proviamo a colorare il nastro partendo da un suo punto qualsiasi, finiamo con il colorare tutto il nastro senza attraversare il bordo.



A questo punto, come già riferito, i matematici dicono semplicemente: una superficie **non è orientabile** se e solo se contiene un nastro di MÖBIUS .
Questa è una definizione moderna di orientabilità.



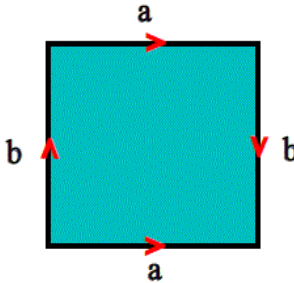
Sappiamo che toro e sfera sono superfici chiuse, e sono entrambi orientabili, hanno cioè "***un dentro***" e "***un fuori***".

Ma esistono superfici chiuse non orientabili? ***Sì, ma non nello spazio in cui viviamo.***

Ci vogliono quattro dimensioni, oppure uno spazio quoziente. ***Una tale superficie è proprio la superficie di Klein.***

Costruiamo la superficie di Klein

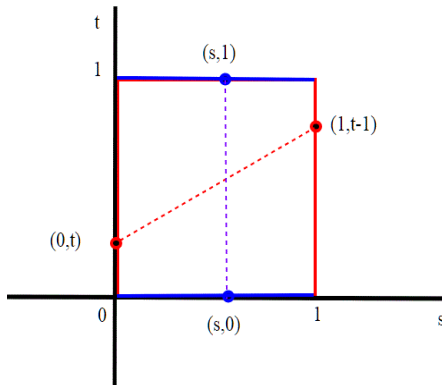
La superficie di Klein, anche detta *bottiglia* di Klein*, si costruisce come quoziente di un quadrato:



**(Il nome Bottiglia di Klein pare essere nato da una traduzione errata del termine tedesco Flache che significa superficie. Questo è stato confuso con la parola Flasche che significa bottiglia. D'altronde, la versione tridimensionale della superficie assomiglia proprio ad una bottiglia).*

Ormai dovremmo aver capito cosa significa uno schema di questo tipo; in questo caso i lati **a, a** vengono incollati mantenendo l'orientamento, mentre invece i lati **b, b** vanno incollati invertendo l'orientamento.

Consideriamo allora il solito quadrato $X = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$;



I punti interni al quadrato sono equivalenti solo a se stessi (come al solito ma questa volta ci tornerà utile).

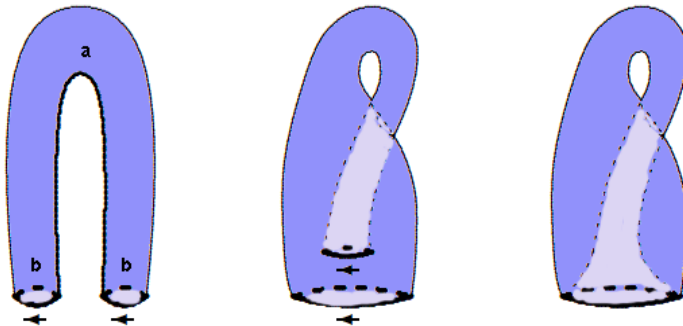
Le coppie di punti equivalenti, sui lati blue sono $(s,0) \sim (s,1)$; mentre sappiamo che nei lati rossi dobbiamo invertire l'orientamento, quindi:

$(0,t) \sim (1,t-1)$.

La superficie di Klein così definita è lo spazio quoziente X/\sim , che sappiamo essere uno spazio topologico.

Però non riusciamo a trovare una funzione parametrica che ne dia l'immagine nello spazio euclideo tridimensionale.

Facciamo un tentativo "pratico" di visualizzare la bottiglia di Klein. Incollando i lati **a**, **a** otteniamo come di consueto il cilindro.

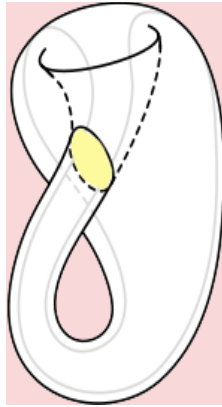


a questo punto, se i lati **b** che nel contempo sono diventati dei cerchi, andassero incollati nello stesso verso, potremmo incollarli direttamente, come nel toro.

Ma non è così; inventiamo allora l'espedito di "bucare" la superficie cilindrica; in questo modo possiamo incollare correttamente i due bordi.

Questo è quello che bene o male fanno tutti, anche con stupende animazioni.

Ma questa **non è la vera bottiglia di Klein**. Perché? **Quando buchiamo la superficie, otteniamo una identificazione di punti sulla superficie del cilindro.**



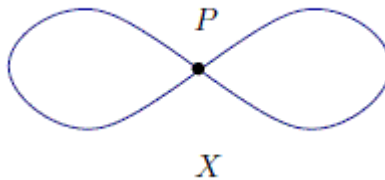
il foro giallo evidenziato

Ma sappiamo che questi punti, essendo interni al quadrato generatore, corrispondono solo a se stessi.

Quindi in realtà questo buco non può esistere.

Esiste una parametrizzazione della bottiglia di Klein in quattro dimensioni, ma chiaramente non può darci nessun risultato visivo.

Intuitivamente, in quattro dimensioni si riesce ad evitare il buco per congiungere i bordi come in tre dimensioni si riesce a congiungere gli estremi di una linea per ottenere una forma a otto non intersecata.



Una curva a forma a otto nel piano si auto-interseca nel punto **P**; nello spazio possiamo fare in modo che questa intersezione non esista

Ma allora come facciamo a capire quali proprietà abbia la bottiglia di Klein? Possiamo usare solo la topologia.

Una parametrizzazione della superficie di Klein in \mathbb{R}^4 .

Consideriamo la funzione parametrica $f: X = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4$ data dalle espressioni:

$$f(s,t) = \begin{pmatrix} (a + r \cos(2\pi t)) \cos(2\pi s) \\ (a + r \cos(2\pi t)) \sin(2\pi s) \\ r \sin(2\pi t) \cos(2\pi s/2) \\ r \sin(2\pi t) \sin(2\pi s/2) \end{pmatrix}$$

al solito, definiamo $g(p) = f(p)$. Si verifica con un po' di pazienza* che $p \sim q \Rightarrow f(p) = f(q)$,

(* per una volta ometto i calcoli; basta sostituire punti equivalenti:

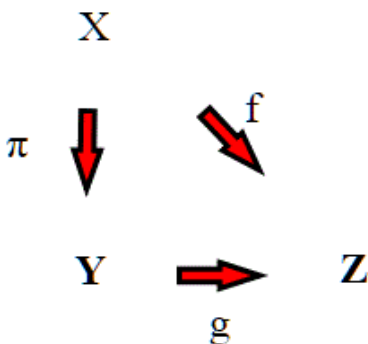
$(s,0) \sim (s,1)$, $(0,t) \sim (1,t-1)$ in $f(s,t)$ e vedere che individuano lo stesso punto).

Quindi g è ben definita.

Inoltre gli unici punti** in cui f non è iniettiva sono proprio quelli equivalenti, corrispondenti alle saldature dei bordi.

Quindi la superficie non si autointerseca.

(** anche questa affermazione andrebbe provata rigorosamente).



Al solito poniamo $Z=f(X)$. f è continua, quindi Z è compatto.

Ma allora, per il solito Teorema, g è un omeomorfismo dello spazio quoziente $Y = X/\sim$ (superficie di Klein) in $Z=f(X)$.

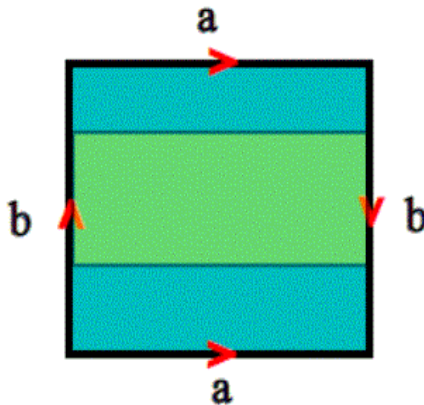
Quindi la superficie di Klein è omeomorfa a $Z=f(X)$.

Z è inoltre senza bordi, quindi la superficie Z è una superficie chiusa:

La bottiglia di Klein è una superficie chiusa.

Nell'articolo sulle varietà topologiche, e come accennato sopra, abbiamo visto la definizione di superficie non orientabile:

una superficie non è orientabile se e solo se contiene un nastro di MÖBIUS .



Come si vede dalla figura, la bottiglia di Klein contiene un nastro di MÖBIUS (la parte verde)

La bottiglia di Klein quindi è una superficie chiusa non orientabile!

Il Piano Proiettivo

Proseguiamo con le nostre superfici generate in modo astratto, tramite la topologia quoziente.

Vogliamo costruire un nuovo spazio topologico, il **piano proiettivo**, tramite le nostre identificazioni di punti.

Ma ricordiamoci prima la definizione "*canonica*" di piano proiettivo, che è la seguente:

Consideriamo l'insieme $R^3 - \{0\}$, ovvero l'insieme dei punti dello spazio tridimensionale individuati da terne (x_1, x_2, x_3) di numeri reali, privato dello 0 .

Consideriamo in tale insieme la relazione di equivalenza così definita:

$x \sim y$ se e solo se esiste $\lambda \neq 0$ tale che $y = \lambda x$, ossia, scritto per esteso: $(y_1, y_2, y_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3)$.

Tale relazione è riflessiva:

$$x = 1 \cdot x$$

simmetrica:

se esiste $\lambda \neq 0$ tale che $y = \lambda x$, allora $x = \frac{1}{\lambda} y$

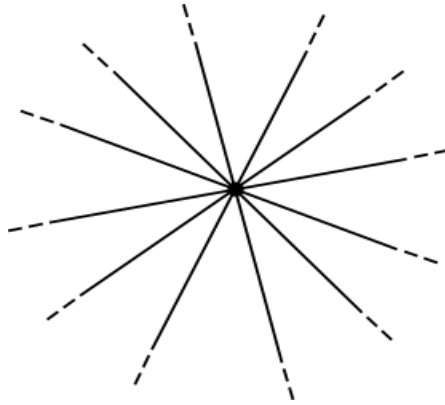
transitiva:

se $x \sim y$ allora $y = \lambda x$; se $y \sim z$ allora $z = \mu y$ quindi $z = \mu \lambda x$, e posto $\lambda \mu = \nu$ sia ha $z = \nu x$ che implica $x \sim z$.

Quindi \sim è una relazione di equivalenza.

Lo spazio quoziente $R^3 - \{0\} / \sim$ è pertanto un **spazio topologico**, si chiama **piano proiettivo reale**, e si indica con \mathbb{RP}^2 .

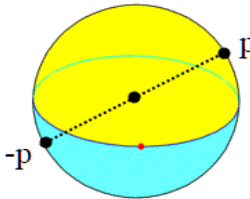
Poiché i vettori appartenenti a una stessa retta vengono identificati tra loro, \mathbb{RP}^2 può essere identificato con l'insieme delle direzioni, ovvero come l'insieme delle rette di R^3 passanti per l'origine.



Lo spazio proiettivo è di **Ausdorff** ; per una volta credetemi sulla parola, in quanto non siamo ancora in grado di dimostrarlo (ricordo che uno spazio topologico è di **Hausdorff** se punti distinti ammettono intornoi disgiunti. *(Tale tipo di spazio si dice anche separato)*).

Un altro modo di generare il piano proiettivo consiste nel utilizzare la sfera unitaria (S^2) e considerare equivalenti i punti della superficie che sono antipodali, ossia $\mathbf{p} \sim -\mathbf{p}$.

Intuitivamente, per definire tutte le direzioni non serve l'intero spazio $R^3 - \{0\}$, ma bastano i punti della superficie sferica, a patto di identificare i punti antipodali come lo stesso punto in quanto le due rette passanti per essi e per l'origine coincidono, ed individuano pertanto la stessa direzione, ovvero lo stesso punto di RP^2 .

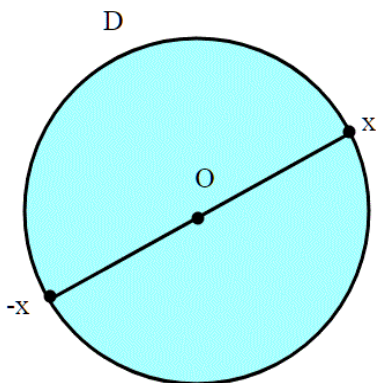


La proiezione $\pi : S^2 \rightarrow S^2 / \sim = \mathbb{R}P^2$, ha come immagine il piano proiettivo; essendo la sfera S^2 compatta anche $\mathbb{R}P^2$ essendo l'immagine tramite la funzione continua π della sfera risulta compatto.

Un altro modo per costruire il piano proiettivo è il seguente:

Consideriamo nel piano il disco unitario:

$$D = \{(s, t) : \sqrt{s^2 + t^2} \leq 1\}$$



In esso, definiamo una relazione di equivalenza dove i punti interni corrispondono a se stessi, mentre un punto x sul bordo ha un solo punto equivalente, che è il simmetrico di x rispetto al centro, ovvero $x \sim -x$.

Come nella sfera, lo spazio quoziente genera lo stesso spazio topologico $\mathbb{R}P^2$, o meglio due spazi topologici omeomorfi.

Ma dimostrare questo non è immediato.

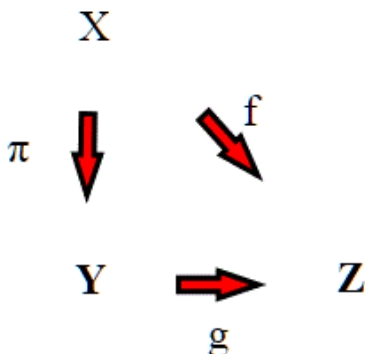
Possiamo comunque provarci.

Ma andiamo per gradi.

Richiami sulle funzioni quoziente

Penso sia meglio riprendere un attimo il discorso inerente le “funzioni quoziente”, già trattato precedentemente, prima di continuare.

Dati i tre spazi topologici X, Y, Z :



dove X è uno spazio topologico, Y lo spazio quoziente, $Y = X / \sim$ rispetto ad una certa relazione d'equivalenza e Z uno spazio topologico.

il nostro problema era costruire un omeomorfismo che va da $Y \rightarrow Z$.

Sappiamo che se esiste una $f: X \rightarrow Z$ continua, tale che assuma gli stessi valori su punti equivalenti, simbolicamente:

$$p \sim q \Rightarrow f(p) = f(q) *$$

Allora definendo $g([p]) = f(p)$ sappiamo che la definizione di g è ben posta, ossia non dipende dal **rappresentante della classe**.

Ci viene adesso in aiuto un noto teorema di topologia (chiamato **Proprietà universale del quoziente**), che ci assicura che $g: Y \rightarrow Z$ è continua se e solo se la composizione $g \circ \pi$ è continua.

Vogliamo adesso estendere questo tipo di ragionamento a due spazi quoziente.

Siano A, B due spazi topologici e su ciascuno di essi sia definita una relazione di equivalenza.

Per non complicare la notazione, pur commettendo un abuso, scriveremo \sim in luogo di \sim_A, \sim_B .

Pertanto la relazione verrà identificata dall'insieme in cui viene considerata.

Vogliamo risolvere il seguente problema: trovare una funzione continua g fra i due quozienti:

$$g : A/\sim \rightarrow B/\sim.$$

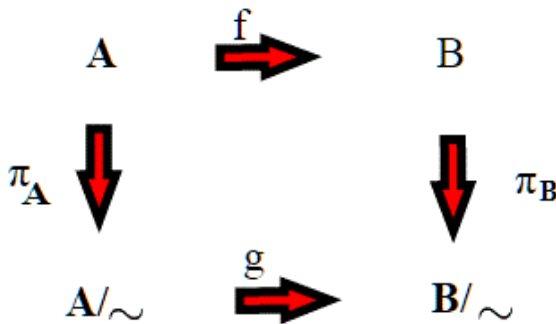
Ricordo che con $[p]$ indichiamo *la classe degli elementi equivalenti a p* , ovvero l'elemento dell'insieme quoziente rappresentato da p .

Supponiamo che esista una funzione $f: A \rightarrow B$, continua, che soddisfi la seguente proprietà:

$$p \sim q \Rightarrow f(p) \sim f(q) **$$

ovvero che mandi punti equivalenti in punti equivalenti.

Consideriamo il seguente diagramma:



Definiamo g come $g([p]) = [f(p)]$.

Valendo **, la definizione è ben posta.

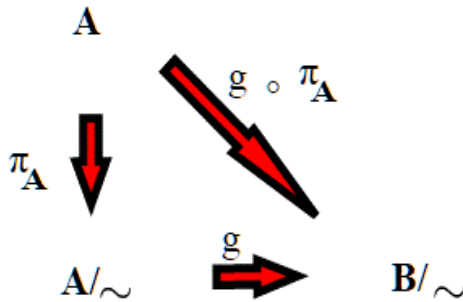
si ha che $g \circ \pi_A = \pi_B \circ f$; infatti se $p \in A$,

$$g(\pi_A(p)) = g([p]) = [f(p)] = \pi_B(f(p)).$$

$\pi_B \circ f$ è continua, essendo la composizione di due funzioni continue.

Ma allora anche $g \circ \pi_A$ è continua, vista l'eguaglianza.

Siamo allora nelle condizioni della **Proprietà universale del quoziente**:



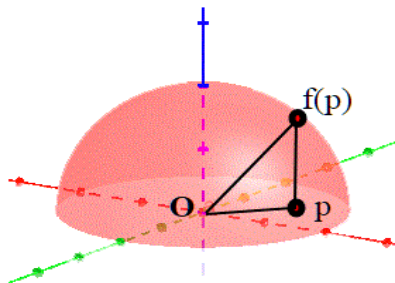
Quindi anche g è continua. 1)

Siamo adesso in grado di dimostrare che i due spazi quoziente, uno costruito sul disco e l'altro dalla sfera sono omeomorfi e rappresentano quindi lo stesso spazio, il piano proiettivo.

Per far ciò, costruiamo una funzione $f : D \rightarrow S^2$ che sia compatibile con le due relazioni di equivalenza definite su disco e sfera.

$$f(s, t) = (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2})$$

questa funzione manda il disco nell'emisfero superiore della sfera.



La funzione f è continua, in quanto le sue tre componenti sono continue. La f soddisfa la proprietà **:

$$p \sim q \Rightarrow f(p) \sim f(q)**;$$

se infatti sul disco prendiamo due punti equivalenti, o sono uguali (se sono interni) oppure sono sul bordo del disco.

Sia (s,t) un tale punto, per esso vale l'eguaglianza $s^2 + t^2 = 1$.

Ma allora:

$$\mathbf{f}(-\mathbf{x}) = \mathbf{f}(-s, -t) = (-s, -t, 0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$x \sim -x \Rightarrow f(x) \sim -f(x) = f(-x) \text{ che è proprio la proprietà **}.$$

La funzione \mathbf{g} definita come $\mathbf{g}([p]) = [f(p)]$ che va da :

$$g : D / \sim \rightarrow S^2 / \sim \text{ è quindi continua, per quanto visto in 1).}$$

Per dimostrare che \mathbf{g} è suriettiva è sufficiente osservare ogni classe di equivalenza in S^2 / \sim ha almeno un rappresentante nell'immagine di \mathbf{f} , e questo è vero, infatti dato un punto \mathbf{p} della sfera almeno uno dei punti \mathbf{p} e $-\mathbf{p}$ è contenuto nell'emisfero superiore (cioè nell'immagine di \mathbf{f}).

La mappa quoziente \mathbf{g} è iniettiva se e solo se \mathbf{f} soddisfa $f(x) \sim f(x') \Leftrightarrow x \sim x'$.

(in una direzione l'abbiamo già visto, nell'altra è quasi banale).

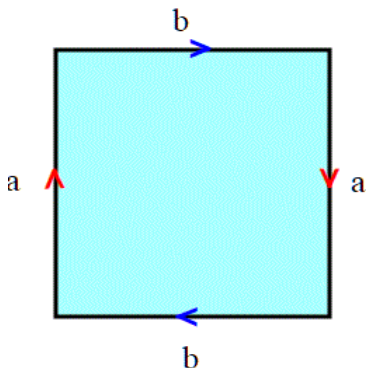
Se ci ricordiamo ora del nostro **teorema "necessario"** :

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e biunivoca. Se X è compatto e Y è di Hausdorff allora è un omeomorfismo.

Possiamo quindi concludere che \mathbf{g} è un omeomorfismo.

Un terzo modo per costruire il piano proiettivo.

Un altro modo classico per costruire il piano proiettivo è considerare il quadrato $[0,1] \times [0,1]$: questa volta incolliamo (identifichiamo) i lati in questo modo:



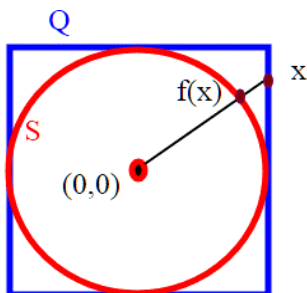
che corrisponde a considerare equivalenti i punti del bordo del quadrato in questo modo:

$$(0, t) \sim (1, 1 - t) \text{ e } (s, 0) \sim (1 - s, 1).$$

Al solito i punti interni del quadrato sono equivalenti solo a se stessi.

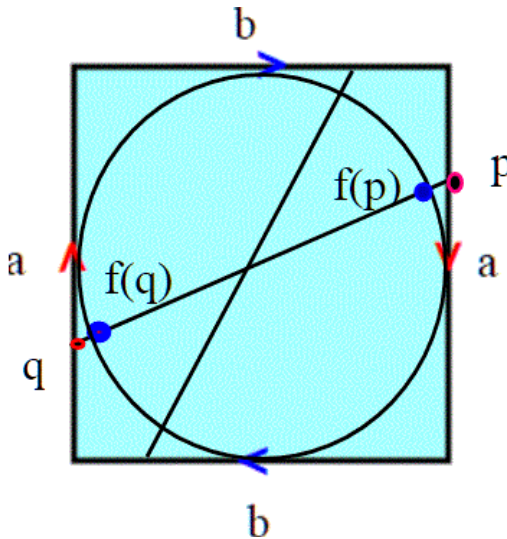
Lo spazio quoziente rispetto a questa relazione di equivalenza è ancora lo spazio proiettivo.

Perchè? ricordiamoci che il quadrato è omeomorfo al cerchio, lo abbiamo visto in uno dei primi articoli de questa serie:



L'omeomorfismo è semplicemente quello della figura, che associa ad un punto del quadrato il punto della circonferenza che si trova nell'intersezione col segmento OX che congiunge il punto X con il centro della circonferenza.

Ma torniamo adesso al nostro schema di identificazione dei lati, e condensiamo tutto in un unico disegno, dove mettiamo anche il disco con la relazione antipodale.



Chiamiamo Q il quadrato e D il disco; vogliamo dimostrare che il quoziente del quadrato è omeomorfo al quoziente del disco con la relazione antipodale.

Sia f funzione descritta nei due disegni sopra; f è un omeomorfismo, quindi è continua.

Come si vede dal disegno $p \sim q \Rightarrow f(p) \sim f(q)$ **.

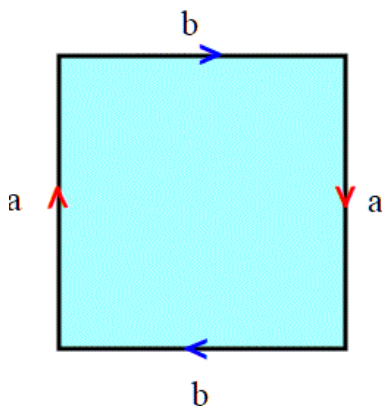
Ci troviamo con un discorso analogo a quello visto sopra nel caso di sfera e disco; se definiamo $g([p])=[f(p)]$ avremo un omeomorfismo g fra:

$g: Q/\sim \rightarrow D/\sim$; quindi anche con la relazione definita sul quadrato, il quoziente topologico è il piano proiettivo.

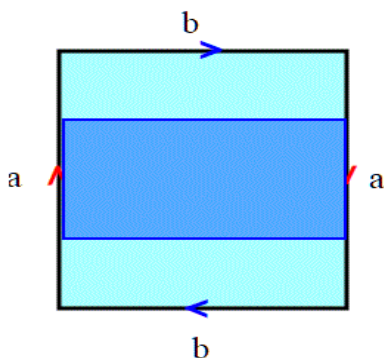
Il piano proiettivo è una superficie chiusa non orientabile

Analogamente a quanto visto per la bottiglia di Klein, lo spazio proiettivo essendo compatto e privo di bordi, è una superficie chiusa.

Abbiamo poi appena visto che il piano proiettivo si può definire con la relazione di equivalenza definita dallo schema:



analogamente a quanto fatto per la bottiglia di Klein, notiamo graficamente che il piano proiettivo contiene un nastro di MÖBIUS (il rettangolo azzurro):



pertanto il piano proiettivo è una **superficie chiusa non orientabile**.

Piano proiettivo e spazio quadridimensionale.

Non esiste un omeomorfismo del piano proiettivo in una superficie dello spazio tridimensionale, ma esiste invece nello spazio di dimensione 4.

Riprendiamo in mano la sfera S^2 immersa nello spazio tridimensionale. Sappiamo che se su di essa consideriamo la relazione antipodale, il quoziente S^2 / \sim rappresenta proprio lo spazio proiettivo $\mathbb{R}P^2$.

Consideriamo ora la funzione $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita da:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$$

La funzione f assume gli stessi valori su punti equivalenti della sfera.

Infatti

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3) = f(-x_1, -x_2, -x_3)$$

come si verifica banalmente.

Pertanto possiamo definire una funzione $g : S^2 / \sim \rightarrow f(S^2)$ data da:

$g([p]) = f(p)$, essendo **indipendente dal rappresentante della classe $[p]$**

g è continua e chiaramente suriettiva su $f(S^2)$; g è anche iniettiva, quindi possiamo concludere, in base al teorema "necessario", che è proprio un omeomorfismo di $g : S^2 / \sim \rightarrow f(S^2)$, quindi anche di $g : \mathbb{R}P^2 \rightarrow f(S^2)$.

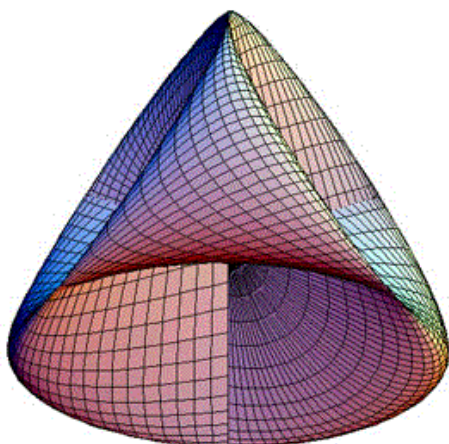
Le superfici rappresentative di $\mathbb{R}P^2$ nello spazio tridimensionale.

Non possiamo trovare una superficie omeomorfa al piano proiettivo nello spazio tridimensionale.

Esistono però delle superfici che rappresentano il piano proiettivo avendo però delle autointersezioni.

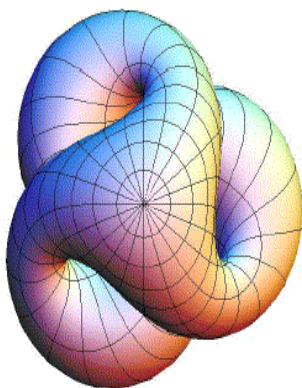
Le presentiamo così, solo graficamente, per dare una idea della complessità e della bellezza del piano proiettivo.

Una di queste è **la superficie di Steiner**, detta anche superficie romana.



la superficie di Steiner

Un'altra rappresentazione del piano proiettivo è data dalla superficie di **Boy**, che fu allievo di **Hilbert**:



la superficie di Boy